Olgu antud mingi *tähestik* Σ — lihtsalt mingi lõplik hulk. Tema elemente nimetame *tähtedeks*.

Sõne on tähestiku elementide mingi (lõplik) järjend. Kõigi sõnede hulka üle tähestiku Σ tähistame Σ^*-ga.

Sõne t *pikkus* on tähtede arv temas. Tähistame $|t|$.

Sõne t tähti tähistame $t[1], t[2], \ldots, t[|t|]$. S.t. $t = t[1]t[2]\cdots t[|t|]$.

Alamsõne: $t[i \ldots j] := t[i]t[i+1]\cdots t[j]$.

Tühja sõnet — ainukest sõnet pikkusega 0 — tähistame ϵ-ga.

Kui $i > j$, siis $t[i \ldots j] := \epsilon$.

Olgu $s, t \in \Sigma^*$. s *esineb* t-s *positsioonis* i, kui $t[i \ldots i + |s| - 1] = s$.

s on t *prefiks*, kui s esineb t-s positsioonis 1. Tähistame $s \sqsubset t$.

s on t *sufiks*, kui s esineb t-s positsioonis $|t| - |s| + 1$. Tähistame $s \sqsupset t$.

Ülesanne: antud s ja t. Leia kõik sellised positsioonid i, et s esineb t-s positsioonis i.

Naiivne algoritm:

```
J := ∅; m := |s|; n := |t|
for i := 1 to n − m + 1 do
    if võrdle_sõnesid(s, m, t, i) = 0 then J ⇐ i
return J
```

võrdle_sõnesid(s, m, t, i) kontrollib, kas sõne s pikkusega m on võrdne alamsõnega $t[i \ldots i+m-1]$. Tagastab vähima sellise j, kus $s[j] \neq t[i+j-1]$. Kui sellist ei leidu, siis tagastab 0. Ta on:

```
for j := 1 to m do
    if s[j] ≠ t[i − 1 + j] then
        return j
return 0
```

Keerukus: $\Theta(m(n-m))$, kus $m = |s|$ ja $n = |t|$.

$i = 1$ $\qquad$ $J = \emptyset$

t

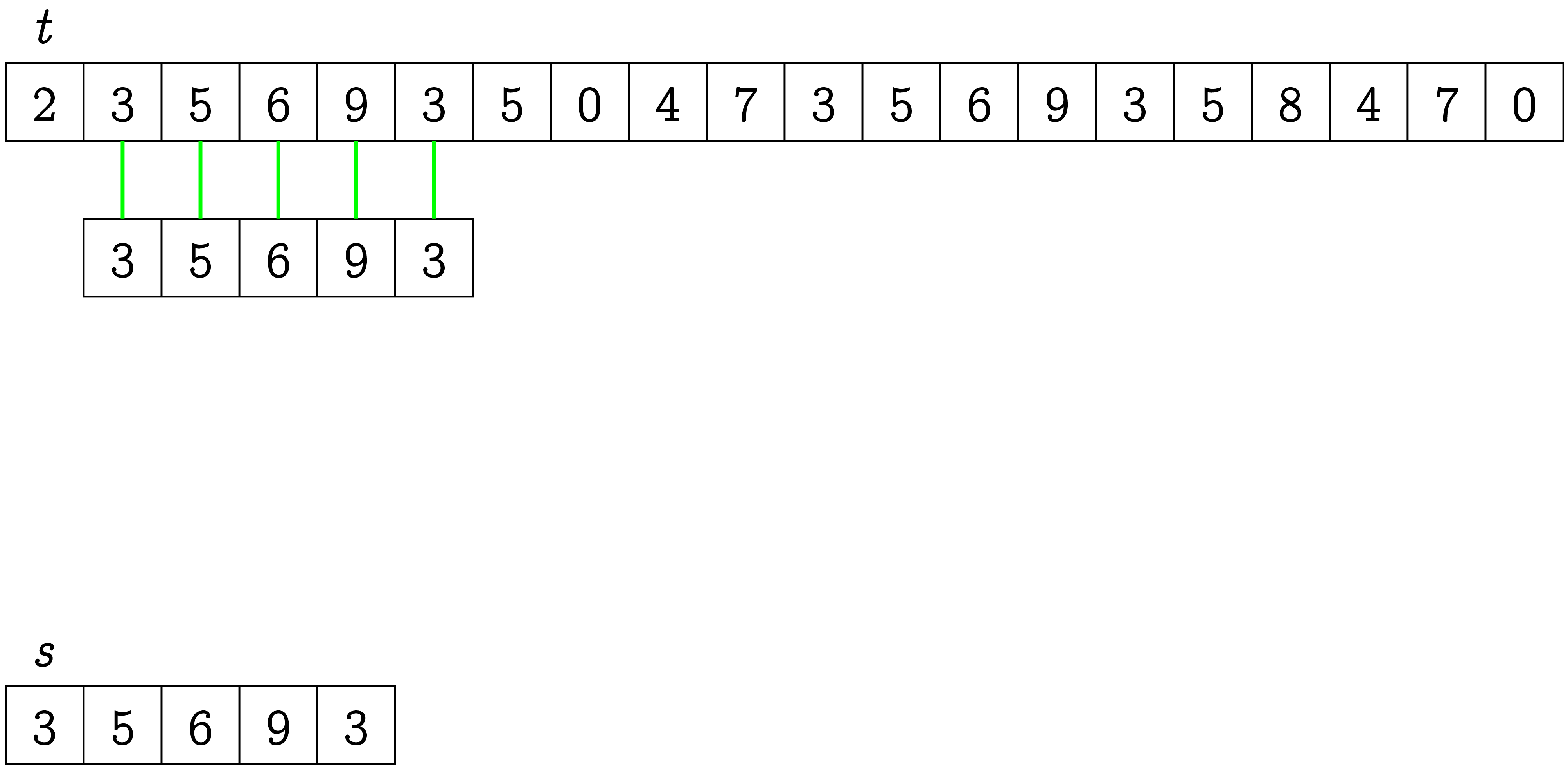
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 2$ $\qquad$ $J = \{2\}$



$i = 3$ $\quad\quad$ $J = \{2\}$

t

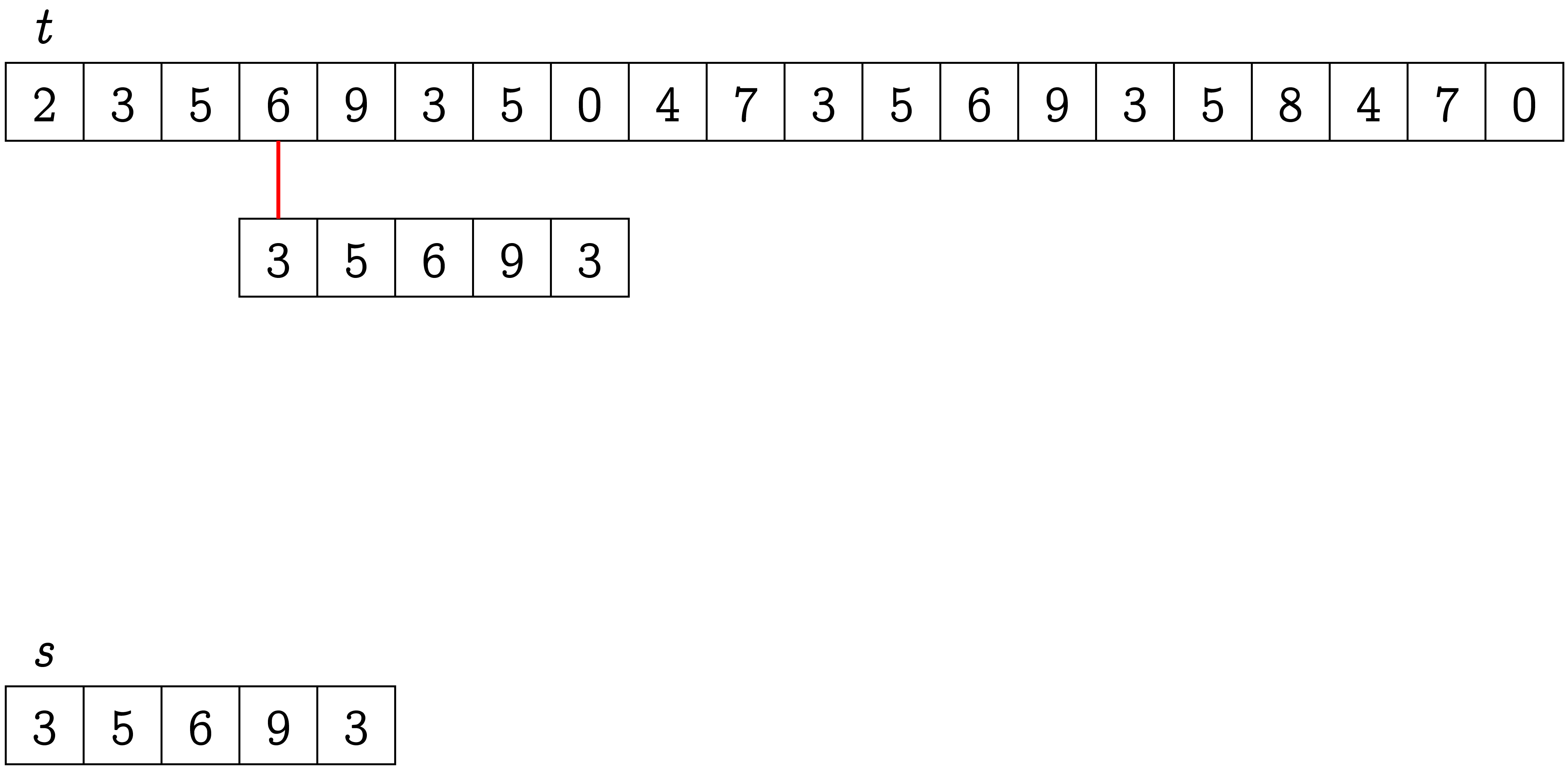
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 4$ $J = \{2\}$



$i = 5$ $J = \{2\}$

t

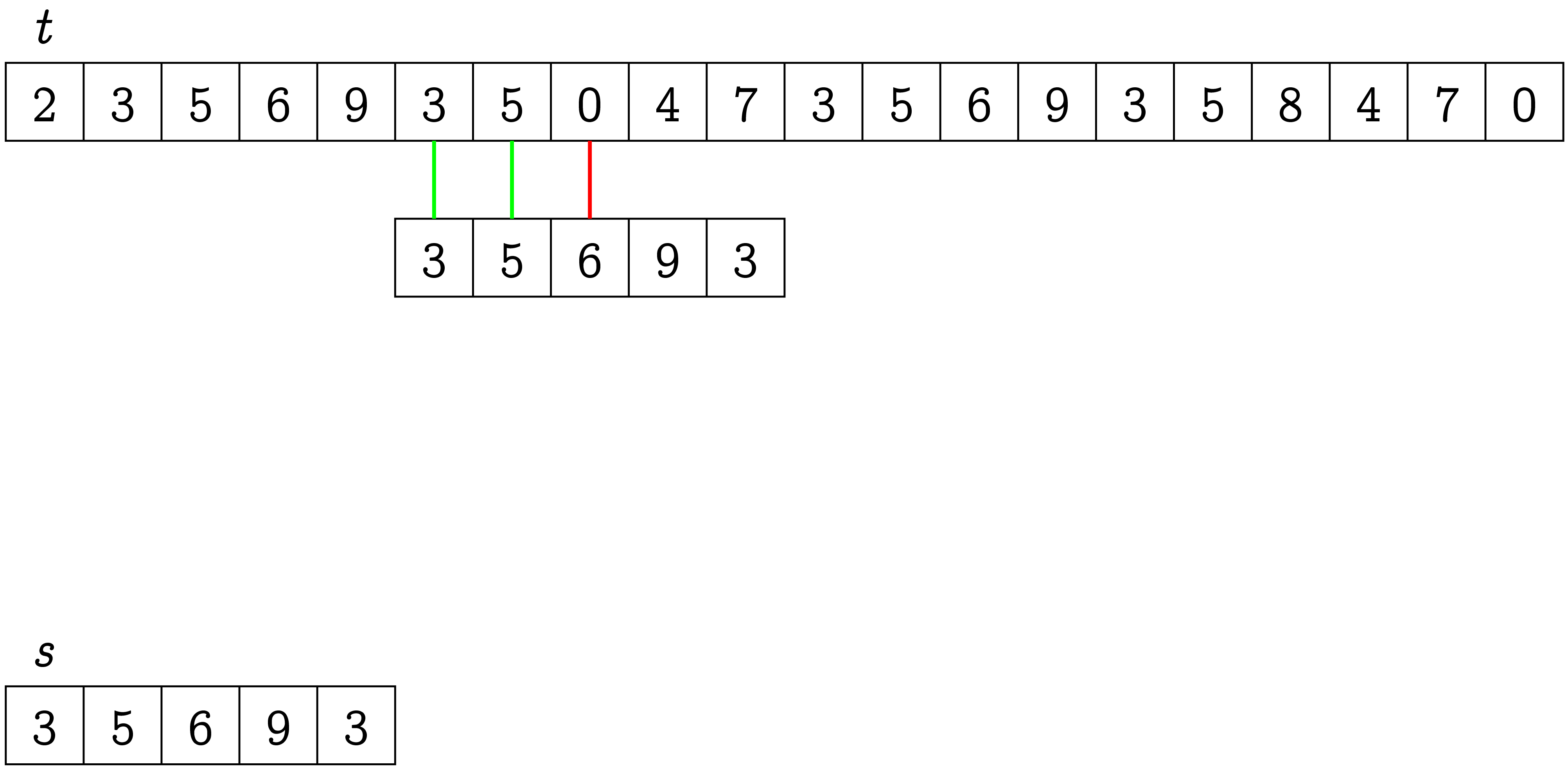
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 6$ $J = \{2\}$



$i = 7$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 8$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 9$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 10$ $\quad$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 11$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 12$ $\qquad$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 13$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 14$ $J = \{2, 11\}$

t

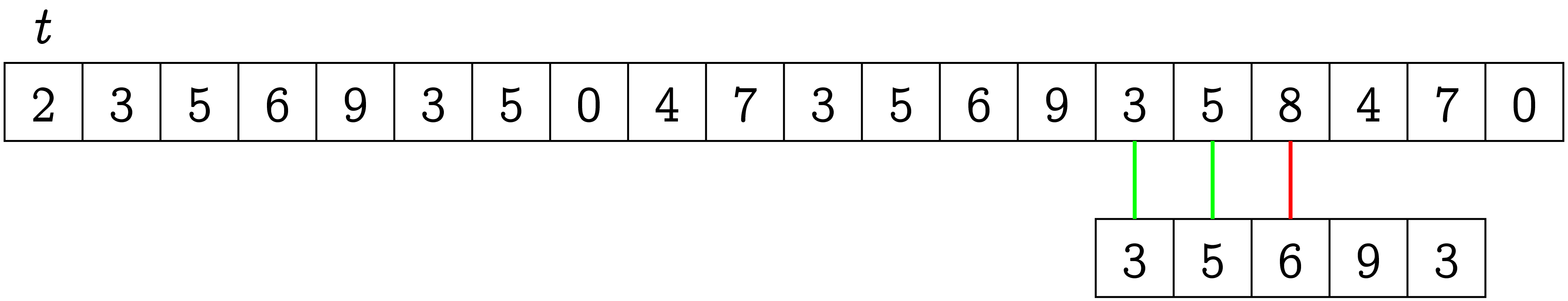
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 15$ $J = \{2, 11\}$



s

3	5	6	9	3

$i = 16$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0
															3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

Töö kiirendamiseks üritame kontrolle „$s = t[i \dots i + m - 1]$?“ kiiremini teha.

Idee: defineerime mingi funktsiooni $h : \Sigma^m \longrightarrow X$ nii, et

- hulga X elementide võrdlemine on konstantse keerukusega;
- $h(t[i+1 \dots i+m])$ on arvutatav $h(t[i \dots i+m-1])$-st konstantses ajas.

Seejärel kontrollime iga i jaoks, kas $h(s) = h(t[i \dots i + m - 1])$. Kui jah (mingi i jaoks), siis kontrollime, kas $s = t[i \dots i + m - 1]$.

Asümptootiliselt me ei võida, kuid veendumine, et s t-s mingis positsioonis ei esine, käib üldiselt märksa kiiremini.

Kui $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, siis sõne pikkusega m on mingi (ülimalt) m-kohaline arv.

Üldjuhul (suvalise Σ korral) olgu $d = |\Sigma|$ ning olgu $\nu : \Sigma \longrightarrow \{0, \ldots, d-1\}$ mingi fikseeritud bijektsioon. Siis igale m-tähelisele sõnele vastab m-kohaline arv d-ndsüsteemis.

$$\nu(s) := \sum_{i=1}^{m} \nu(s[i]) d^{m-i}$$

Olgu $q \in \mathbb{N}$. Võtame $h(s) := \nu(s) \mod q$.

(q võtame võimalikult suure, kuid piisavalt väikse selleks, et $h(s)$ täisarvutüüpi ära mahuks.)

$h(t[i+1\ldots i+m])$ on arvutatav $h(t[i\ldots i+m-1])$-st konstantses ajas:

$$\begin{aligned} h(t[i+1\ldots i+m]) = & \left(h(t[i\ldots i+m-1]) - \nu(t[i]) \cdot d^{m-1}\right) \\ & \cdot d \\ & + \nu(t[i+m]) \pmod q \ . \end{aligned}$$

Seejuures $d^{m-1} \mod q$ võib ette valmis arvutada.

Kõik arvutused on seejuures $\mod q$.

Vaatame eelmist näidet. Võtame $q = 17$.

Meil oli $s =$ „35693“. Siis $s \mod 17 = 10$.

Üldjuhul tuleb meil leida $\sum_{i=1}^{m} \nu(s[i])d^{m-i} \mod q$. Seda on mugav teha Horneri skeemiga:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$

$$((\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \ .$$

(kõik arvutused ikka mod q)

Funktsioon modpoly(s, d, q, a, m) leiab sõnele $s[a \ldots a+m]$ vastava h väärtuse. Ta on:

$h := 0$
for $i := a$ **to** $a + m$ **do**
  $h := (((h \cdot d) \mod q) + \nu(s[i])) \mod q$
return h

$i = 1$ $J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

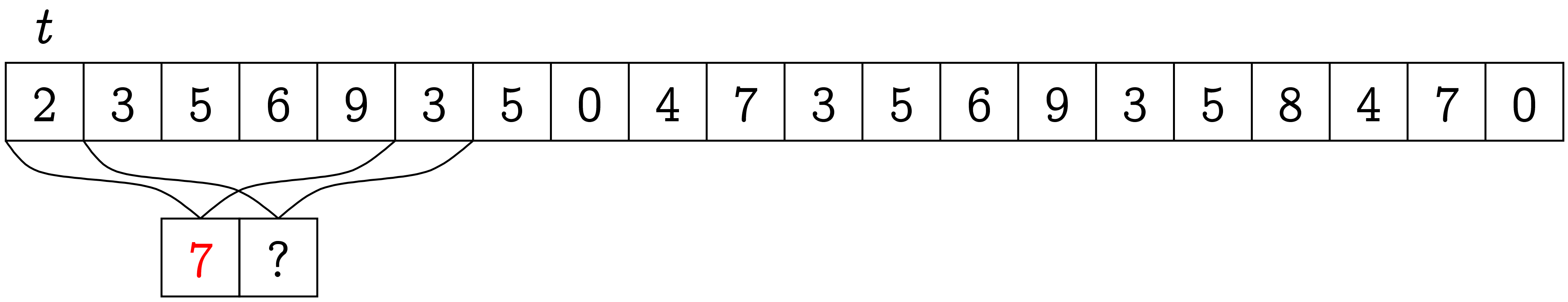
7

s

3	5	6	9	3

mod $17 = 10$

$i = 2$ $J = \emptyset$



$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 2$

$J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$$\boxed{7}\,\boxed{?} = (7 - 2 \cdot 4) \cdot 10 + 3 \mod 17$$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$i = 2$ $J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{10}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \bmod 17 = 4$

$i = 2$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 3$ $\qquad$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

10	?

$$= (10 - 3 \cdot 4) \cdot 10 + 5 \mod 17$$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 3$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

2

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 4$ $J = \{2\}$

t

$$2\ 3\ 5\ \underbrace{6\ 9\ 3\ 5\ 0}_{\boxed{7}}\ 4\ 7\ 3\ 5\ 6\ 9\ 3\ 5\ 8\ 4\ 7\ 0$$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 5$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{4}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \bmod 17 = 4$

$i = 6$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$$\underbrace{3 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 7}_{\boxed{10}}$$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

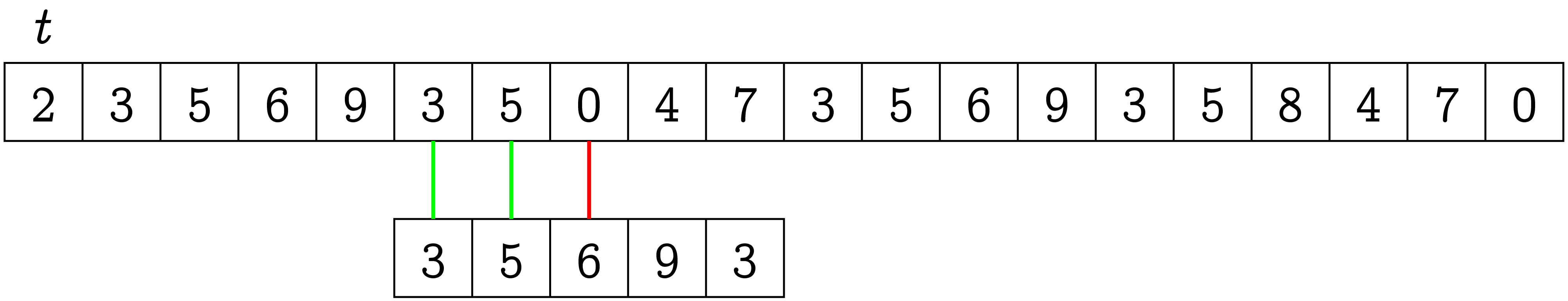
$10000 \mod 17 = 4$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$i = 6$ $\qquad$ $J = \{2\}$



$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 7$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{0}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 8$

$J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\underbrace{0\;4\;7\;3\;5}_{\boxed{9}}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \bmod 17 = 4$

$i = 9$ $\quad\quad$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{11}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 10$ $\qquad$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\underbrace{7\ 3\ 5\ 6\ 9}_{\boxed{10}}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 10$ $\qquad J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 11$ $\qquad\qquad$ $J = \{2\}$

t

$$\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{9}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{7}\underbrace{\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{9}\boxed{3}}_{\boxed{10}}\boxed{5}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{0}$$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

$\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{9}\boxed{3} \mod 17 = 10$ $\qquad$ $10000 \mod 17 = 4$

$i = 11$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$i = 12$ $\qquad\qquad$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$$\underbrace{5\;6\;9\;3\;5}_{\boxed{2}}$$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \bmod 17 = 4$

$i = 13$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{15}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \bmod 17 = 4$

$i = 14$ $\qquad$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{16}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 15$ $\quad$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{11}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 16$ $\qquad$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

$\boxed{7}$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

Eelnev on tuntud kui **Rabin-Karpi** algoritm:

$J := \emptyset;\ m := |s|;\ n := |t|;\ d := |\Sigma|$

$D := 1$

$\textbf{for } i := 1 \textbf{ to } m - 1 \textbf{ do } D := D \cdot d \mod q$

$hs := \mathrm{modpoly}(s, d, q, 1, m);\ ht := \mathrm{modpoly}(t, d, q, 1, m)$

$\textbf{for } i := 1 \textbf{ to } n - m + 1 \textbf{ do}$

$\quad \textbf{if } hs = ht \textbf{ then}$

$\quad\quad \textbf{if } \text{võrdle\_sõnesid}(s, m, t, i) = 0 \textbf{ then } J \Leftarrow i$

$\quad \textbf{if } i < n - m + 1 \textbf{ then}$

$\quad\quad a1 := (ht - \nu(t[i]) \cdot D) \mod q$

$\quad\quad a2 := a1 \cdot d \mod q$

$\quad\quad ht := (a2 + \nu(t[i + m])) \mod q$

$\textbf{return } J$

Töö kiirendamiseks kasutame ära järgmist tähelepanekut:

Kui s ja $t[i \ldots i+m-1]$ erinevad esimest korda j-ndas positsioonis, siis $s[1] = t[i]$, $s[2] = t[i+1]$,...,$s[j-1] = t[i+j]$.

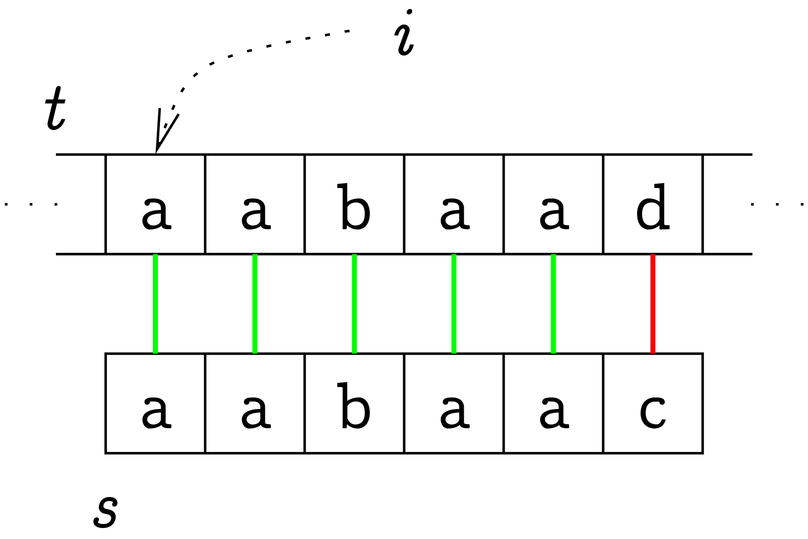
Sõltuvalt s-st võib järeldada, et mõningates järgmistes positsioonides ($i+1$, $i+2$, jne.) pole mõtet s-i t-s otsida — niikuinii ei ole.

Selleks, et s võiks t-s esineda positsioonis $i+1$, on tarvilik $s[1] = s[2]$, $s[2] = s[3]$,...$s[j-2] = s[j-1]$.

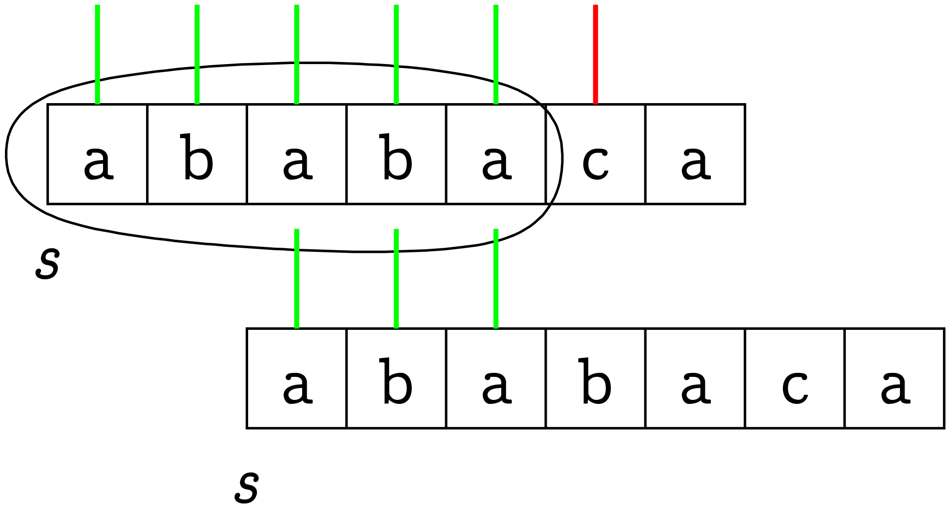
Selleks, et s võiks t-s esineda positsioonis $i+2$, on tarvilik $s[1] = s[3]$, $s[2] = s[4]$,...$s[j-3] = s[j-1]$.

Jne.

Näiteks:



Saades siin erinevuse 6. positsioonis, teame, et $i+1$ korral tuleb | |, $i+2$ korral tuleb |, $i+3$ korral tuleb | | ja edasi on mõtet võrrelda $s[3]$-e ja $t[(i+3)+2]$-e.



Kui erinevus tekkis j-ndas positsioonis, siis vaatame sõnet $s[1 \ldots j-1]$.

Nihutame sõnet s paremale senikaua, kuni tema algus langeb kokku sõne $s[1 \ldots j-1]$ lõpuga.

S.t. me otsime pikimat sellist sõne u, mis oleks $s[1 \ldots j-1]$ prefiksiks ja sufiksiks.

Olgu $\pi_1, \ldots, \pi_m$ massiiv („prefiksfunktsioon“), nii et iga i jaoks on

- $\pi_i \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$;
- $s[1 \ldots \pi_i] \sqsupset s[1 \ldots i]$;
- π_i on suurim arv, mis eelmisi tingimusi rahuldab.

Näiteks kui $s =$ „aabcaabca“, siis π on:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π_i	0	1	0	0	1	2	3	4	5

Alamsõne esinemisi saab siis otsida järgnevalt: (**Knuth-Morris-Pratti** (KMP) algoritm)

$m := |s|;\ n := |t|;\ J := \emptyset$

$\pi := \mathrm{leia\_pi}(s)$

$sp := 0$

for $tp := 1$ **to** n **do**

    while $sp > 0$ **and** $s[sp+1] \neq t[tp]$ **do** $sp := \pi_{sp}$

    if $s[sp+1] = t[tp]$ **then** $sp := sp + 1$

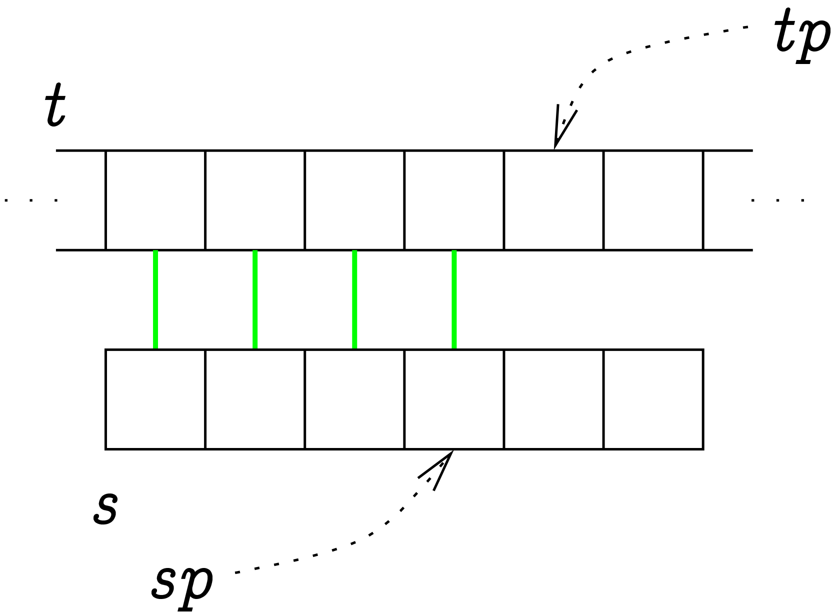
    if $sp = m$ **then**

        $J \Leftarrow tp - m + 1$

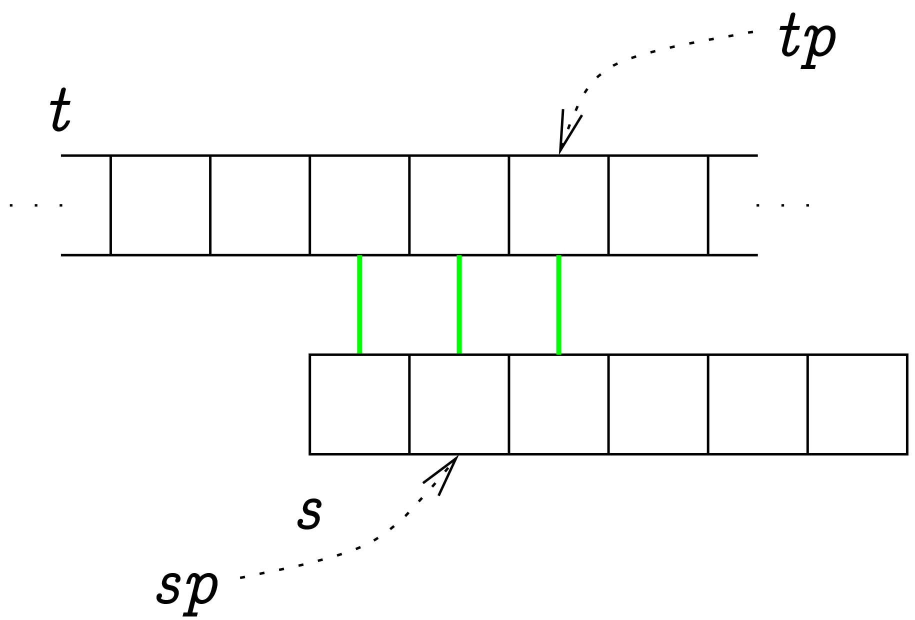
        $sp := \pi_{sp}$

return J

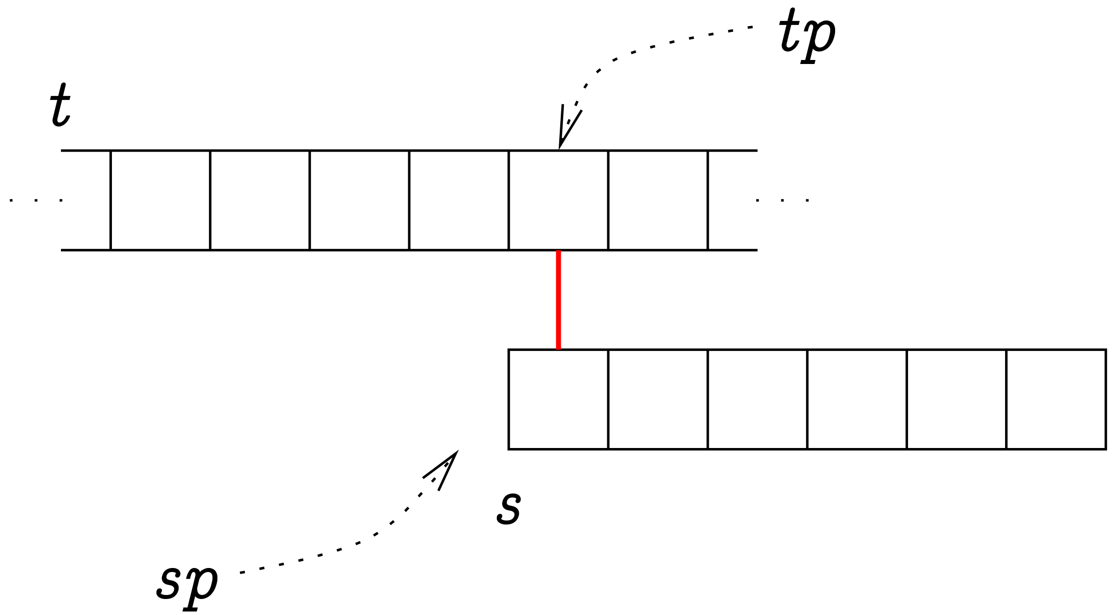
Peale 4. rida:



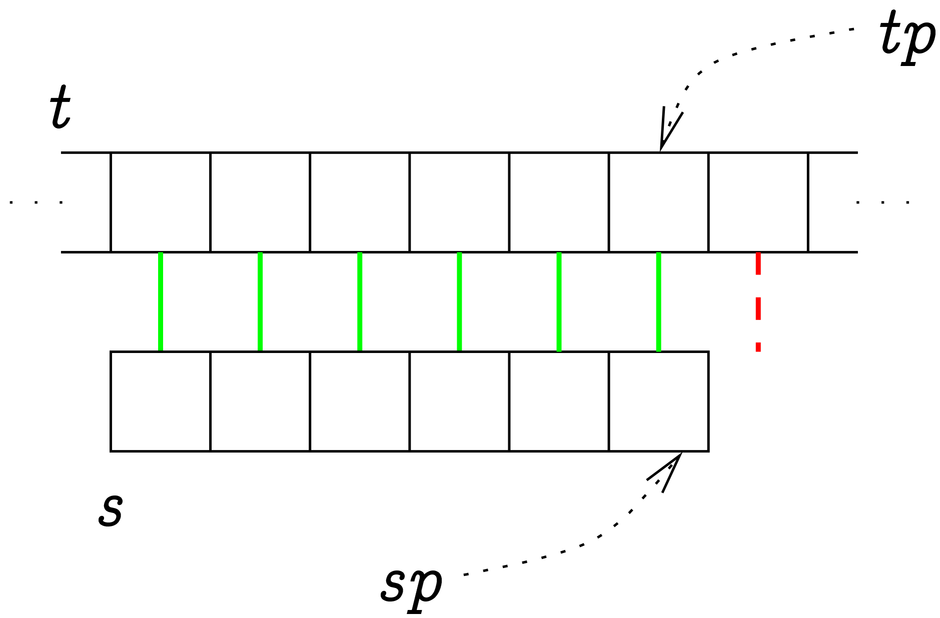
Peale 5. rida: kas



với



Read 7–9: kui $sp = m$, siis



Siis peaks $s[sp+1]$ võrdlemine t elemendiga negatiivse vastuse andma. Kuna $s[sp+1]$ tegelikult ei eksisteeri, siis tuleb seda juhtu eraldi töödelda (mitte teha järgmisel iteratsioonil reas 5).

Keerukus: ilma leia_pi väljakutseta on KMP-algoritmi tööaeg $O(n)$.

Näitame, et põhitsükli ühe iteratsiooni (read 4–9) *amortiseeritud* tööaeg on $O(1)$.

Potentsiaaliks võtame muutuja sp väärtuse. Küllalt suure ajaühiku korral siis:

Read 4 ja 7–9 võtavad $\leqslant 1$ ühiku tõelist aega. Kuna sp väärtus neis ridades ei suurene, siis võtavad nad ka $\leqslant 1$ ühiku amortiseeritud aega.

4 **for** $tp := 1$ **to** n **do**
    $\ldots$
7   **if** $sp = m$ **then**
8         $J \Leftarrow tp - m + 1$
9         $sp := \pi_{sp}$

Rida 6 võtab $\leqslant 1$ ühiku tõelist aega. Kuna sp võib suureneda 1 võrra, siis võtab ta $\leqslant 2$ ühikut amortiseeritud aega.

6 $\quad$ **if** $s[sp+1] = t[tp]$ **then** $sp := sp + 1$

5. reas võtab iga iteratsioon $\leqslant 1$ ühiku tõelist aega. Et aga $\pi_i < i$, siis väheneb sp igal iteratsioonil (vähemalt ühe võrra). Seega võtab 5. rea iga iteratsioon $\leqslant 0$ ühikut amortiseeritud aega.

5 **while** $sp > 0$ **and** $s[sp+1] \neq t[tp]$ **do** $sp := \pi_{sp}$

Kokku võtab üks iteratsioon seega $\leqslant 1 + 2 + 0 = 3$ ühikut amortiseeritud aega.

Töö alguses $sp = 0$ ja alati $sp \geqslant 0$. Seega on tõeline koguaeg mitte suurem kui amortiseeritud koguaeg.

Korrektsuse näitamiseks tuleb näidata, et

1. s esineb t-s kõigil J-i lisatavatel positsioonidel;
2. ükski selline positsioon ei jää J-i lisamata.

Esimene neist järeldub otseselt invariandist peale 4. rida.

Teine järeldub sellest, et kui

$$s[1] = t[i], s[2] = t[i+1], \ldots, s[j] = t[i+j-1],$$

siis iga täiendava nihke k jaoks, mis on väiksem kui $j - \pi_j$, leidub $l \in \{1, \ldots, j-k\}$ nii, et $s[l] \neq s[l+k]$, s.t. $s[l] \neq t[i+k+l-1]$, s.t. s ei esine t-s positsioonil $i+k$.

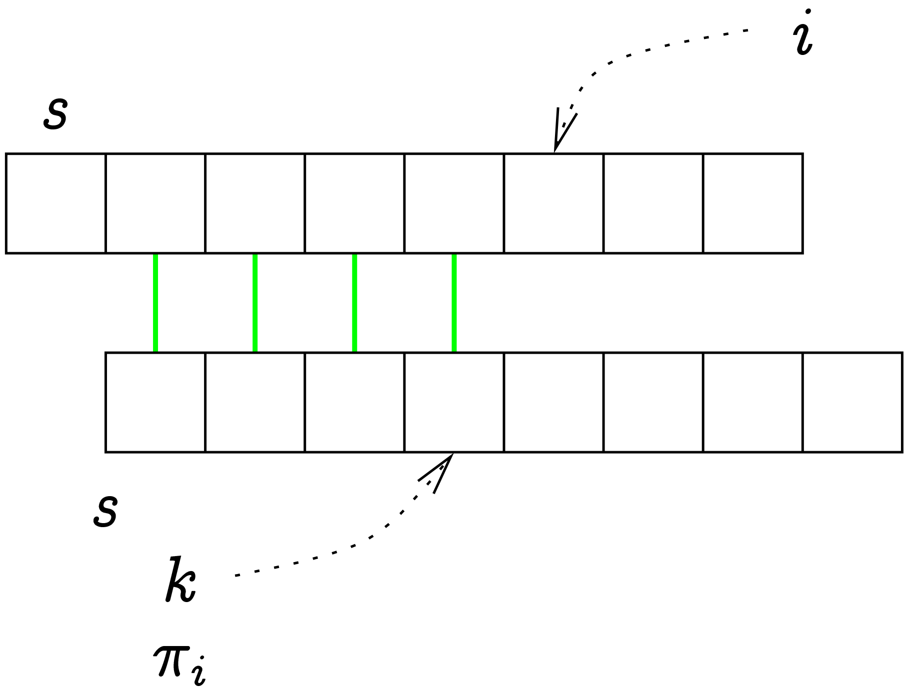
leia_pi(s) on sarnane otsimisalgoritmi endaga:

$m := |s|;\ \pi_1 := 0$
$k := 0$
for $i := 2$ **to** m **do**
  while $k > 0$ **and** $s[k+1] \neq s[i]$ **do** $k := \pi_k$
  if $s[k+1] = s[i]$ **then** $k := k + 1$
  $\pi_i := k$
return π

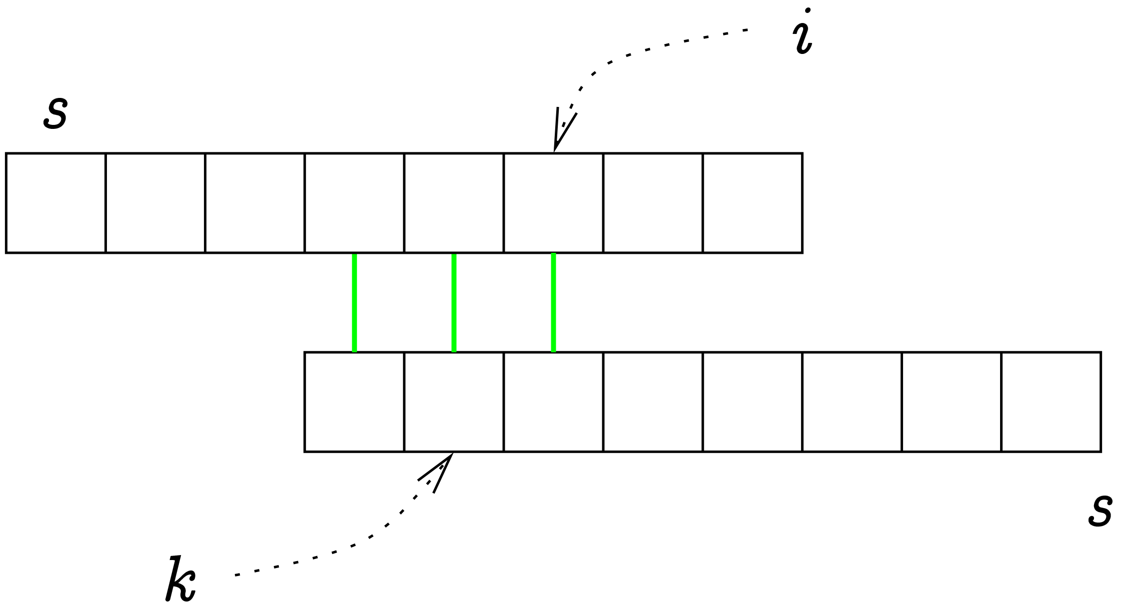
Taas saame näidata, et tsükli üks iteratsioon võtab $O(1)$ ühikut amortiseeritud aega. Potentsiaaliks on k väärtus.

Kogu KMP-algoritmi keerukus on seega $O(n + m)$.

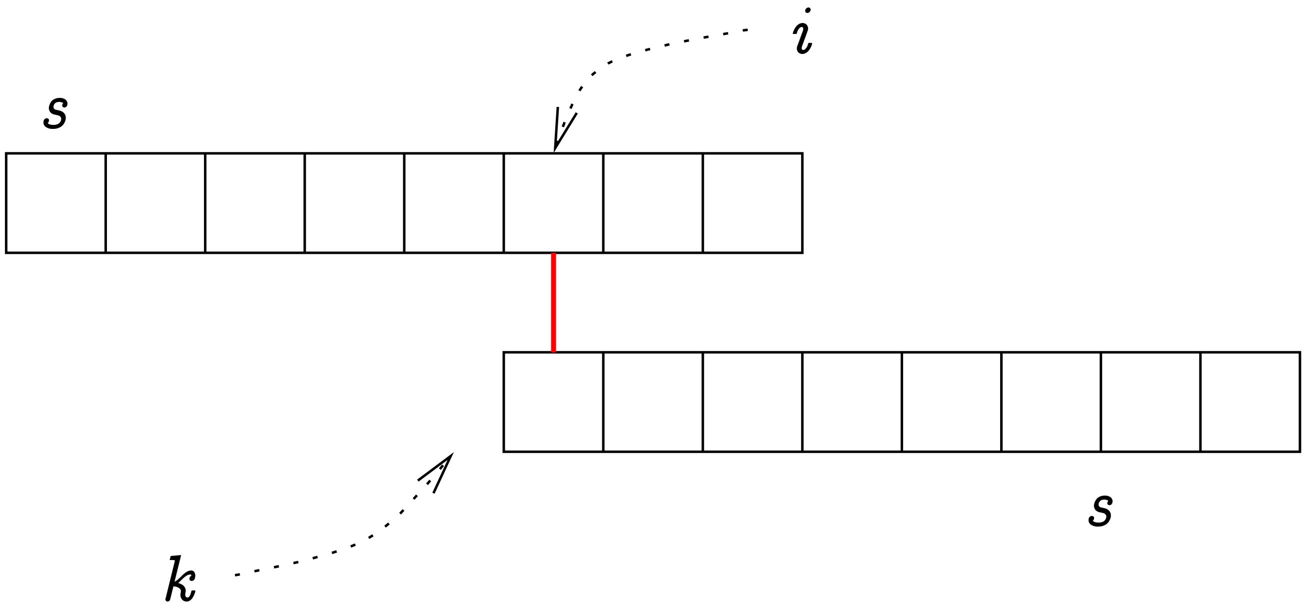
Peale 3. rida:



Peale 4. rida: kas



või



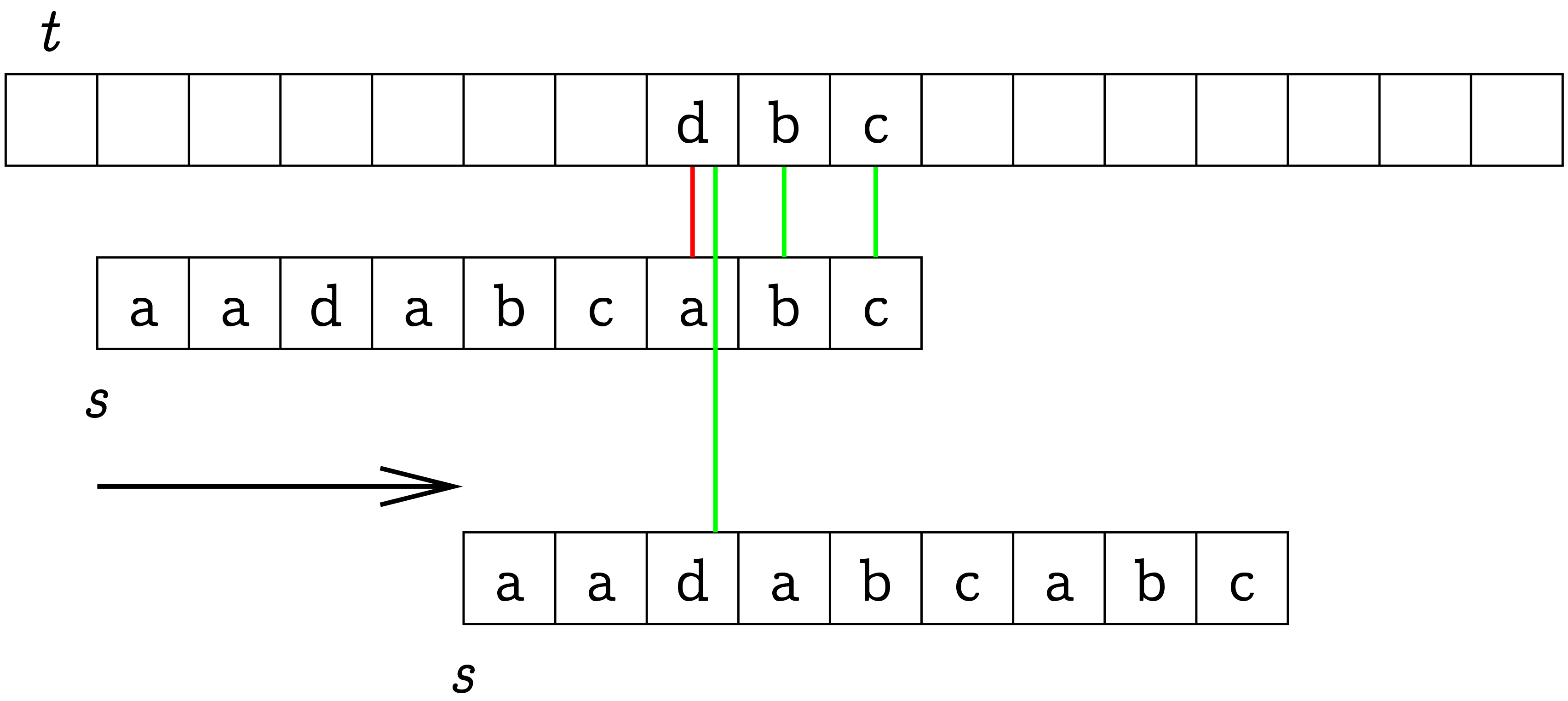
Boyer-Moore'i (BM) alamsõne otsimise algoritm töötab halvimal juhul ajas $O(m(n-m))$, aga pika s-i ja suure Σ korral võib praktikas kõige kiiremaks algoritmiks osutuda.

$m := |s|;\ n := |t|;\ J := \emptyset$
initsialiseeri_BM
$i := 1$
while $i \leqslant n - m + 1$ **do**
    $j := m$
    while $j > 0$ **and** $s[j] = t[i + j - 1]$ **do** $j := j - 1$
    if $j = 0$ **then** $J \Leftarrow i$
    $i := i +$ leia_nihe$(j, t[i + j - 1])$
return J

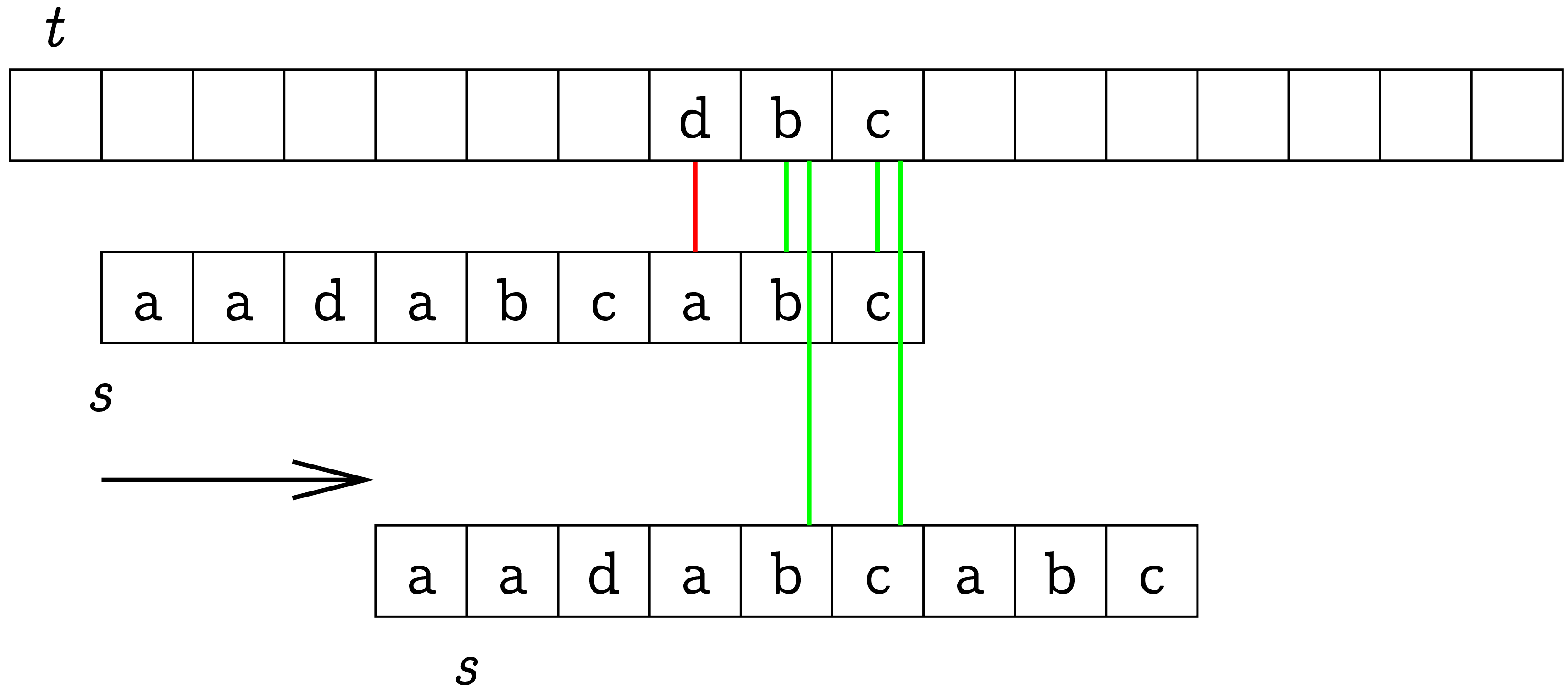
S.t. BM-algoritm käib sõne t lihtsalt vasakult paremale läbi ja uurib, kas seal esineb alamsõnena sõne s. Uurimine käib paremalt vasakule.

Teatavas positsioonis mitteesinemise korral minnakse sõnes t edasi (rida 8). Edasi minnakse vähemalt 1 positsiooni võrra, aga lisaks sellele kasutatakse kahte heuristikat:

ebasobiva tähe heuristika:



sobiva sufiksi heuristika:



Neist kahest heuristikast võetakse parem.

Ebasobiva tähe heuristika kasutamiseks tuleb meil iga $a \in \Sigma$ jaoks leida tema viimane esinemiskoht s-s.

Olgu λ massiiv, mis on indekseeritud Σ elementidega. Siis leia_viimased_kohad(s, Σ) on

for all $a \in \Sigma$ **do** $\lambda_a := 0$
for $i := 1$ **to** $|s|$ **do**
    $\lambda_{s[i]} := i$
return λ

Sobiva sufiksi heuristika kasutamiseks: Olgu j see koht, kus tekkis erinevus s ja t vahel.

S.t. meie sobivaks sufiksiks on $s[j+1\dots m]$.

Meil tuleb leida suurim selline γ_j, et

- $\gamma_j < m$;
- kehtib üks järgmistest väidetest:
  - $s[j+1\dots m] \sqsupset s[1\dots\gamma_j]$ (kui $m-j \leqslant \gamma_j$),
  - $s[1\dots\gamma_j] \sqsupset s[j+1\dots m]$ (kui $\gamma_j \leqslant m-j$);

γ_j on korrektselt defineeritud, sest 0 rahuldab alati neid kahte tingimust.

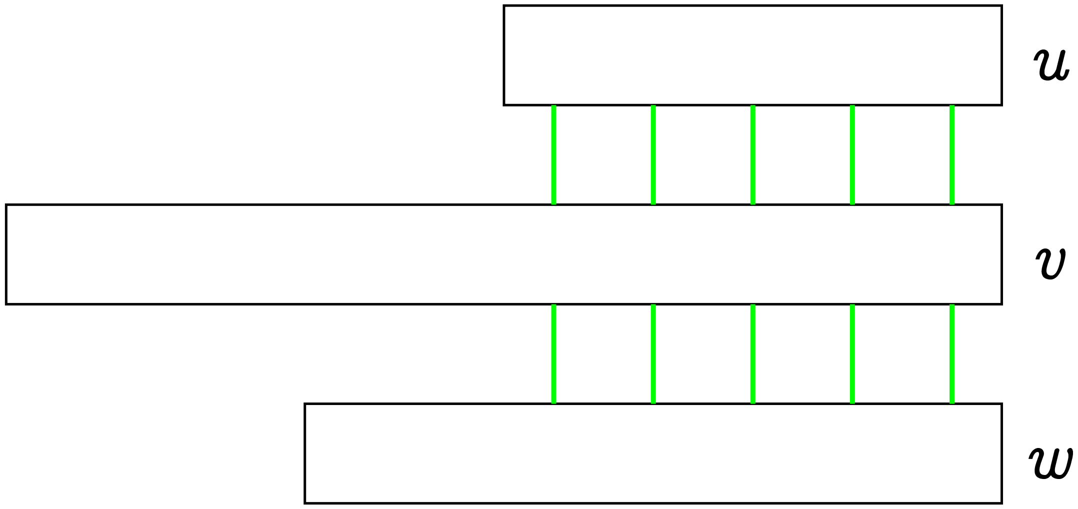
Tähistagu $u \sim v$, kus $u, v \in \Sigma^*$, seda, et $u \sqsupset v$ või $v \sqsupset u$.

Teisisõnu, kui $u \sim v$, siis u ja v lõpud langevad kokku kuni neist kahest lühema sõne alguseni.

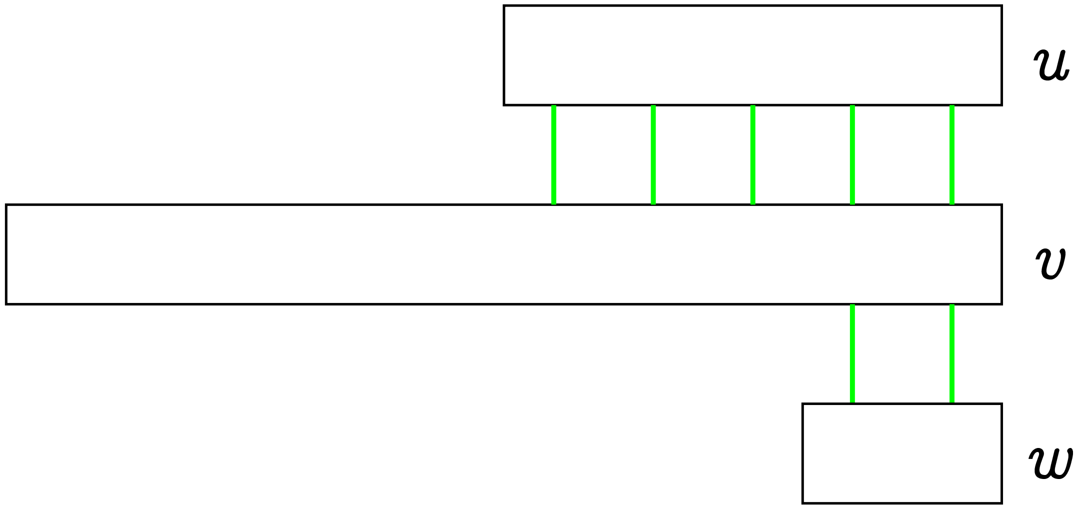
$$\gamma_j := \max\{k \,:\, 0 \leqslant k < m \text{ ja } s[1 \ldots k] \sim s[j+1 \ldots m]\}$$

Näitame, et kui $u \sim v$ ja $w \sqsupset v$ $(u, v, w \in \Sigma^*)$, siis $u \sim w$.

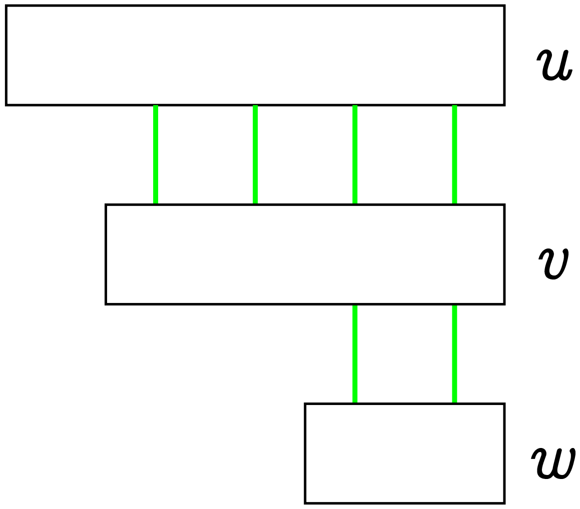
Kui $|u| < |v|$ ja $|u| \leqslant |w|$, siis



Kui $|u| < |v|$ ja $|u| > |w|$, siis



Kui $|u| \geqslant |v|$, siis



Kuna $s[1 \ldots \pi_m] \sim s$ ja $s[j+1 \ldots m] \sqsupset s$, siis $s[1 \ldots \pi_m] \sim s[j+1 \ldots m]$. Seega kuulub π_m hulka, mis esineb γ_j definitsioonis, ning järelikult

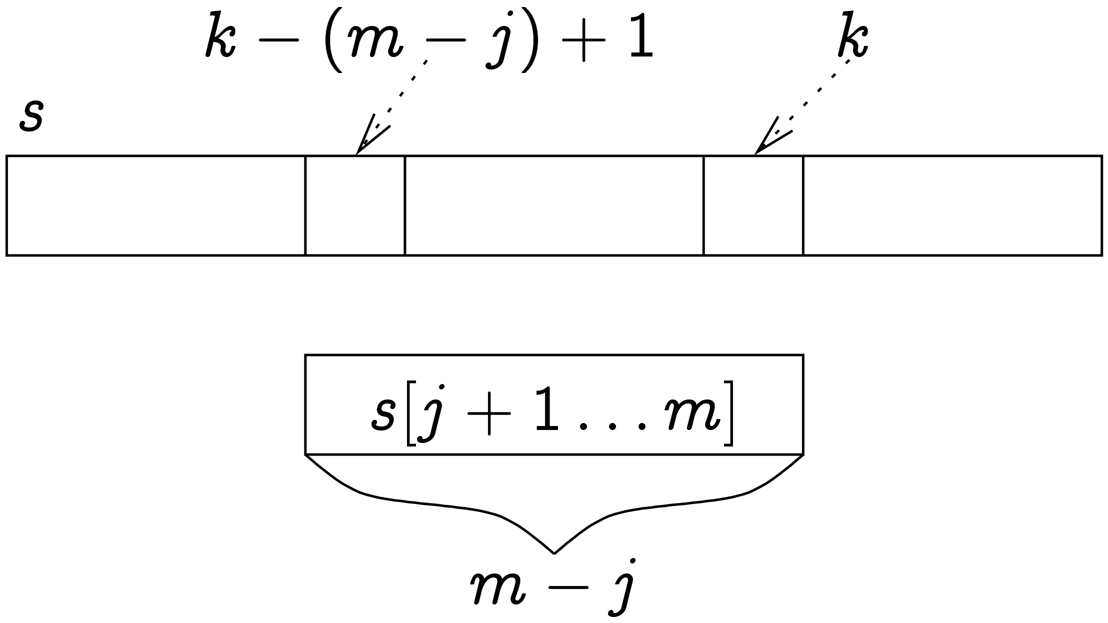
$$\gamma_j = \max\{k : \pi_m \leqslant k < m \text{ ja } s[1 \ldots k] \sim s[j+1 \ldots m]\}$$

Kui $s[1 \ldots k] \sqsupset s[j+1 \ldots m]$, siis $s[1 \ldots k] \sqsupset s$ ja vastavalt π_m definitsioonile $k \leqslant \pi_m$. Seega

$$\gamma_j = \max\bigl(\{\pi_m\} \cup \{k : \pi_m < k < m \text{ ja } s[j+1 \ldots m] \sqsupset s[1 \ldots k]\}\bigr).$$

Väide $s[j+1\ldots m] \sqsupset s[1\ldots k]$ on samaväärne väitega $s[j+1\ldots m] \sqsubset s[k-m+j+1\ldots m]$.

$$\gamma_j = \max\Big(\{\pi_m\} \cup \{k : \pi_m < k < m \text{ ja } s[j+1\ldots m] \sqsubset s[k-m+j+1\ldots m]\}\Big)$$



Olgu π' s-i „sufiksfunktsioon“ (analoogiline prefiksfunktsioonile). S.t. iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ jaoks

- $\pi'_i \in \{i+1, i+2, \ldots, m+1\}$;
- $s[\pi'_i \ldots m] \sqsubset s[i \ldots m]$;
- π'_i on vähim arv, mis eelmisi tingimusi rahuldab.

Näiteks kui $s =$ „aabcaabca“, siis π' on:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π'_i	5	6	7	8	9	9	10	10	10

Kui $\bar{s}$ on s „paremalt vasakule“ ja $\bar{\pi}$ on tema prefiksfunktsioon, siis kehtib $i + \bar{i} = m + 1 \Rightarrow \pi'_i + \bar{\pi}_{\bar{i}} = m + 1$. Seega $\pi'_i = m + 1 - \bar{\pi}_{m+1-i}$.

Olgu $\pi_m < k < m$. Vaatame tingimust $s[j+1\dots m] \sqsubset s[k-m+j+1\dots m]$. Olgu $l = \pi'_{k-m+j+1}$.

- Kui $l > j+1$, siis vaadeldav tingimus ei kehti.
- Kui $l = j+1$, siis vaadeldav tingimus kehtib.
- Kui $l < j+1$, siis võib tingimus kehtida või mitte kehtida. Kui ta aga kehtib, siis ka $s[j+1\dots m] \sqsubset s[l\dots m]$.

Viimasel juhul olgu $k' = l-1-j+m$. Siis $k' > k$ ja $s[j+1\dots m] \sqsubset s[k'-m+j+1\dots m]$. S.t. k polnud maksimaalne selline, mille korral antud tingimus kehtib.

$$\gamma_j = \max\bigl(\{\pi_m\} \cup \{k \,:\, \pi_m < k < m \text{ ja } \pi'_{k-m+j+1} = j+1\}\bigr)$$

arvuta_sobiva_sufiksi_pikkus(s) on

$m := |s|$; $\bar{s} :=$ pööra_ümber(s)
$\pi :=$ leia_pi(s); $\bar{\pi} :=$ leia_pi($\bar{s}$)
for $i := 1$ **to** m **do** $\pi'_i := m + 1 - \bar{\pi}_{m+1-i}$
for $j := 1$ **to** m **do** $\gamma_j := \pi_m$
for $h := 1$ **to** m **do**
    $j := \pi'_h - 1$
    $k := h - 1 - j + m$
    if $\gamma_j < k$ **then** $\gamma_j := k$
return γ

initsialiseeri_BM on

$\lambda :=$ leia_viimased_kohad(s)
$\gamma :=$ arvuta_sobiva_sufiksi_pikkus(s)

leia_nihe(j, x) on

if $j > 0$ **then**
    $nl := j - \lambda_x$
else
    $nl := 0$
$ng := m - \gamma_j$
return $\max(nl, ng)$