Järgmine kord, s.t. 6. oktoobril loengut ei toimu. Ma pole sel ajal Eestis.

Sorteerimine:

Antud massiiv $a_1, \ldots, a_n$. Massiivi elemendiks on

$$\langle v\tilde{o}ti, \text{kirje} \rangle \ .$$

Massiivi elemendid tuleb ümber järjestada nii, et võtmed oleksid mittekahanevas järjekorras.

Kui seejuures võrdsete võtmetega elementide järjekord ei muutu, siis on sorteerimismeetod *stabiilne*.

Kõiki sorteerimismeetodeid on võimalik stabiliseerida, lisades massiivi elemendile täiendava välja:

$$\langle võti, orig, \text{kirje} \rangle,$$

omistades enne sorteerimist $a[i].orig := i$ ning lugedes sorteerides võtmeks paari $(võti, orig)$ (leksikograafiliselt järjestatuna).

Edasises tähistab

- $a_i < a_j$ massiivi i-nda ja j-nda elemendi võtmete võrdlemist;
- $a_i :=: a_j$ massiivi i-nda ja j-nda elemendi vahetamist.

Sorteerimine pistemeetodil (joonised 4.1 ja 4.2):

Kui lõik $a_1, \ldots, a_i$ on juba sorteeritud, siis leia a_{i+1} jaoks õige koht $a_1, \ldots, a_i$ seas ja pista ta sinna vahele (i muutub 1-st $(n-1)$-ni). Pistemeetod on stabiilne, kui „õige koht“ on parempoolseim võimalik.

Keerukus:

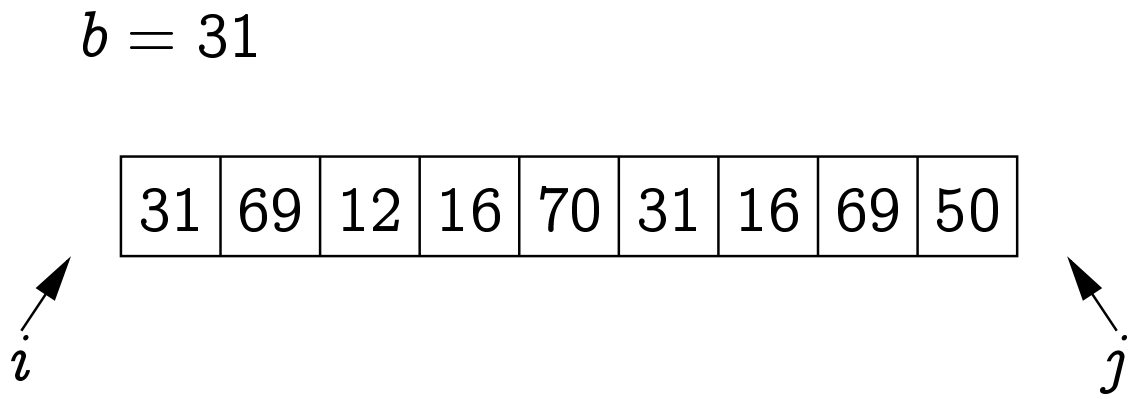
- Välimist tsüklit täidetakse $n-1$ korda.
- a_{i+1}-le koha otsimine ja ruumi tegemine võtab aega $\Theta(i)$:
  - kui a on massiiv, siis ruumi tegemine nõuab $\Theta(i)$ elemendi nihutamist (joonis 4.1);
  - kui a on list, siis koha otsimisel tuleb $\Theta(i)$ elementi läbi vaadata (joonis 4.2).

Kokku seega $\Theta(n^2)$.

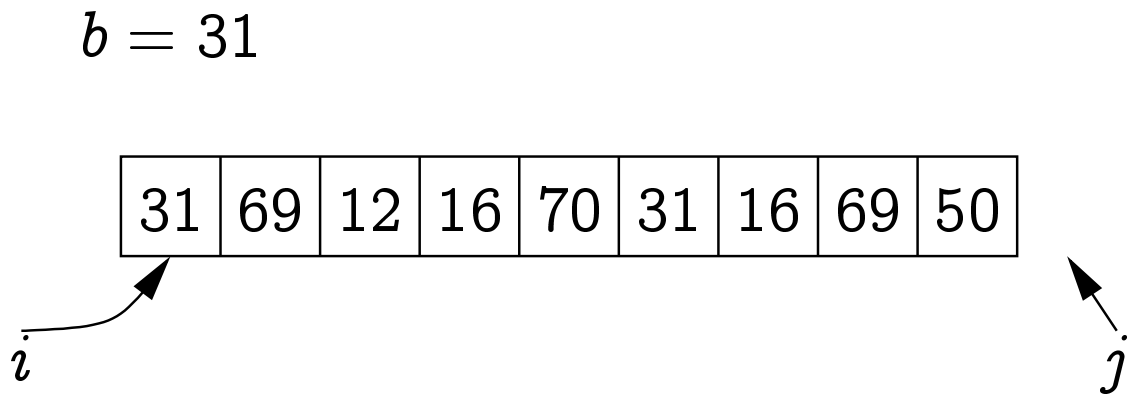
Sorteerimine kiirmeetodil (joonised 4.4 ja 4.5):

- Vali mingi võtmeväärtus b (näiteks $b := a_1$).
- Kogu kõik kirjed, mis on $\leqslant b$, massiivi algusesse, ja kirjed, mis on $\geqslant b$, massiivi lõppu (prots. *jaotada*).
  - Otsi samaaegselt massiivi algusest alates suuri kirjeid ja lõpust alates väikesi kirjeid.
  - Kui on leitud algusosast suur kirje ja lõpuosast väike kirje, siis vaheta nad ära ja otsi edasi.
  - Kui otsimisjärgedega massiivi keskel kokku saadakse, siis on valmis.
- Sorteeri mõlemad massiivipooled.

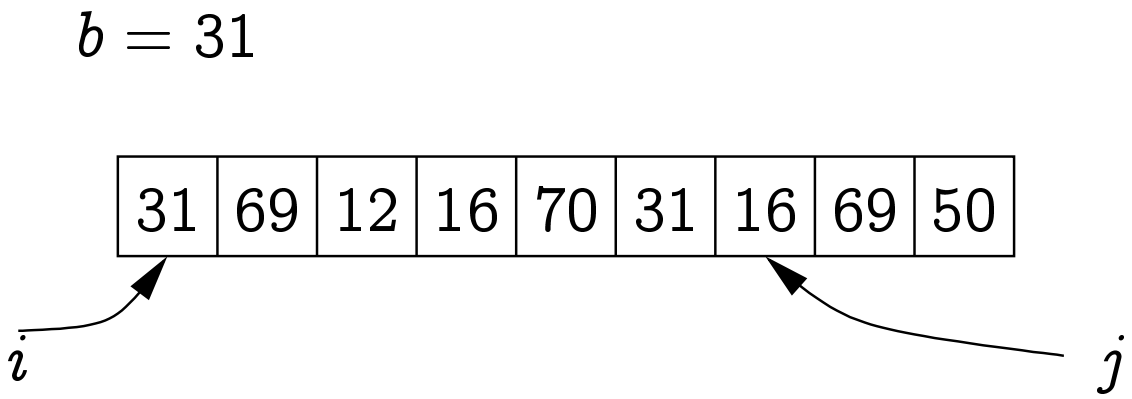
Näide jaotamisest:



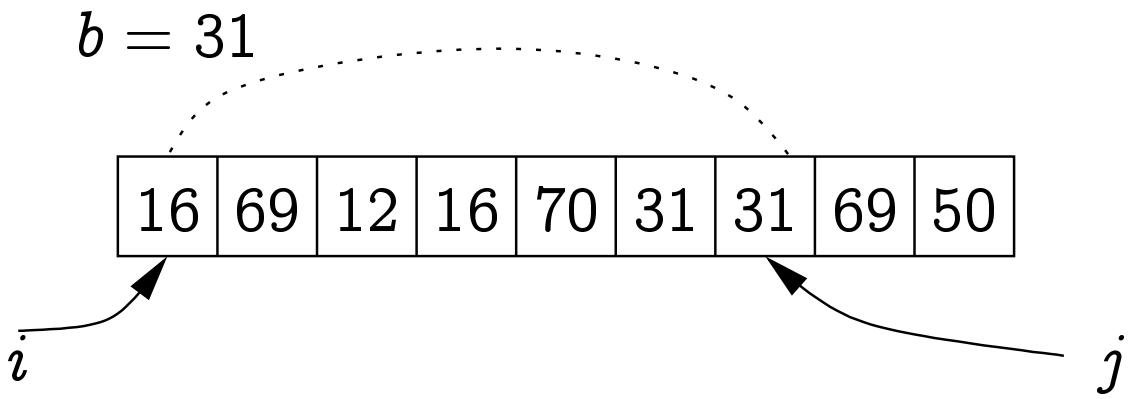
Näide jaotamisest:



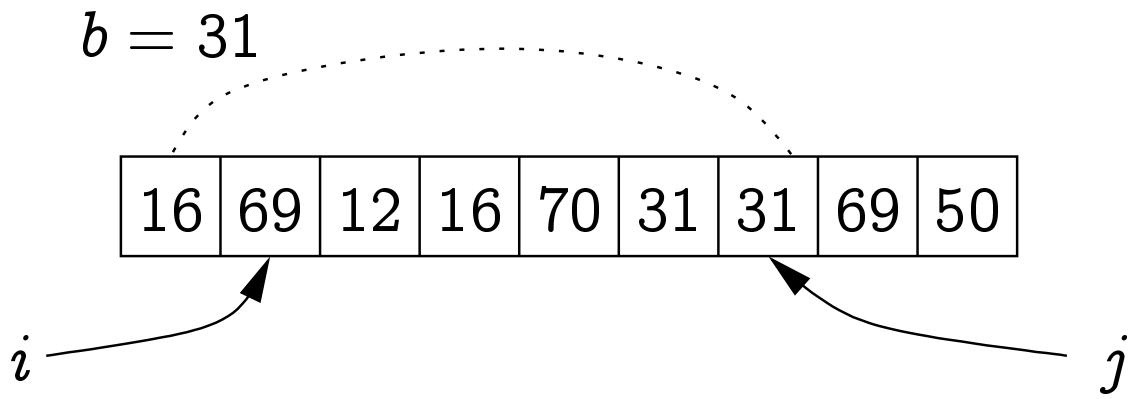
Näide jaotamisest:



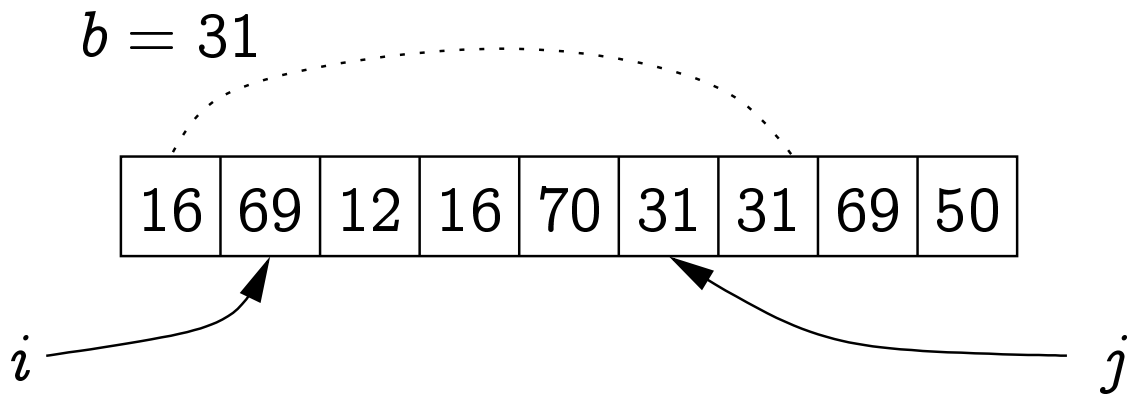
Näide jaotamisest:



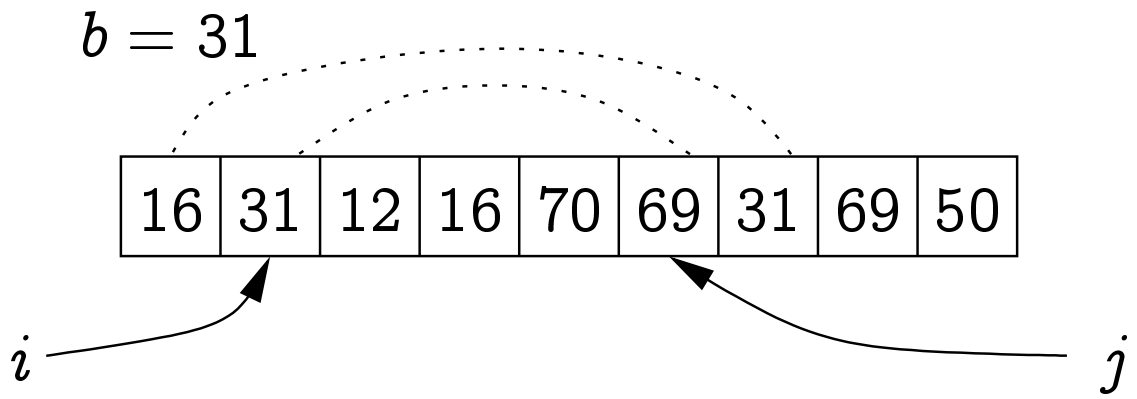
Näide jaotamisest:



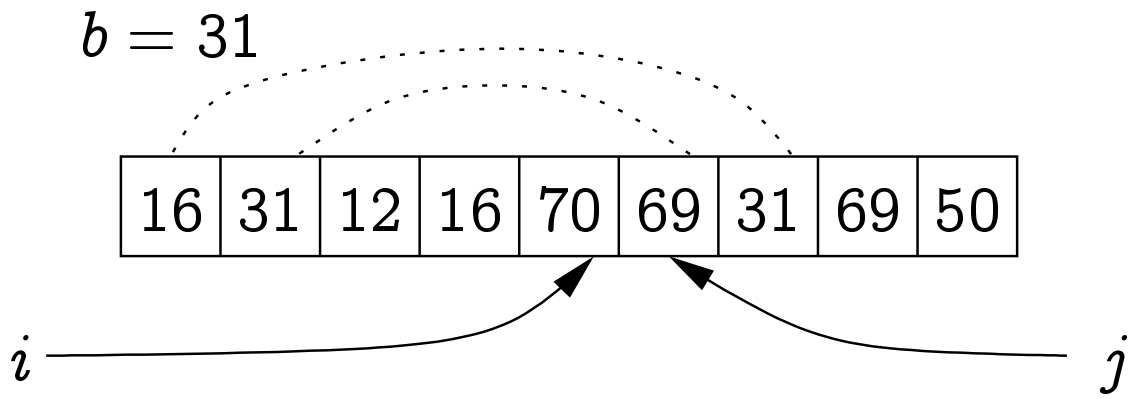
Näide jaotamisest:



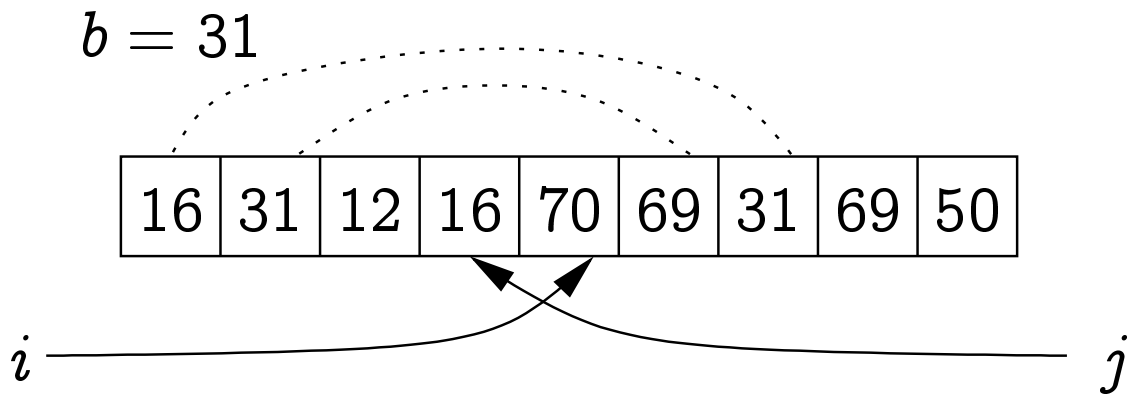
Näide jaotamisest:



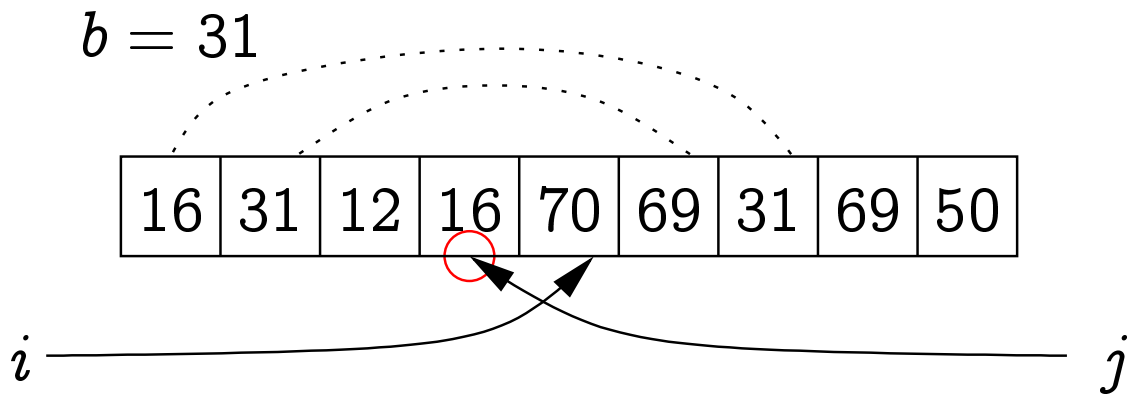
Näide jaotamisest:



Näide jaotamisest:



Näide jaotamisest:



Kiirmeetod ei sobi lihtahela sorteerimiseks, sest protseduuris *jaotada* tuleb meil ahelat läbida mõlemat pidi.

Küll aga sobib kiirmeetod topeltseotud ahela sorteerimiseks (ahela, kus igast tipust on viit järgmisele ja eelmisele tipule).

Kiirmeetod on ebastabiilne.

Keerukus halvimal juhul:

Protseduur jaotada vaatab massiivi kõik elemendid korra läbi — keerukus $\Theta(n)$.

Kuna ühte poolde võib jääda ainult üks kirje
(ja teise $(n-1)$ kirjet), siis

$$T(n) = T(1) + T(n-1) + \Theta(n) \ .$$

Kuna $T(1) = \Theta(1)$, siis

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(\sum_{i=1}^{n} i) = \Theta(n^2) \ .$$

Samas parimal juhul, kui jaotamine toimub alati keskelt, siis

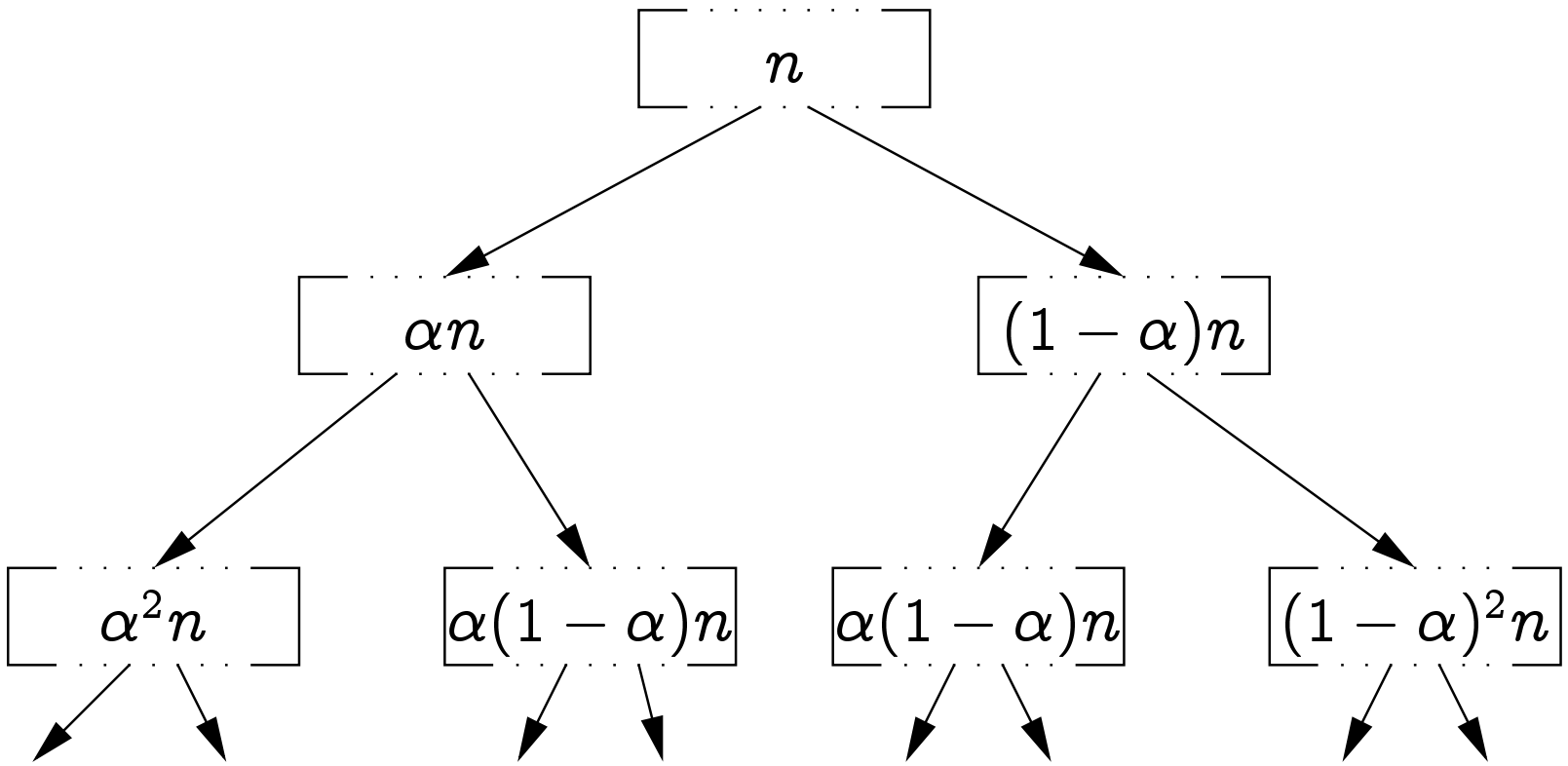
$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

ja vastavalt põhiteoreemile (1. loeng), $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Ka juhul, kui jaotamine toimub alati proportsioonis $\alpha : (1-\alpha)$, on keerukus logaritmiline. (α on suvaline reaalarv 0 ja 1 vahelt).

Tõepoolest, vaatame rekursioonipuud:

Töö hulk antud tasemel:



n

n

n

$\ldots$

$\leqslant n$

tasemete arv: $\max(\log_{1/\alpha} n, \log_{1/(1-\alpha)} n) = \Theta(\log n)$

Randomiseeritud kiirmeetod: jaotamisel vali võtmeväärtuseks juhuslikult üks sorteeritava massiivi elementidest.

randomiseeritud_jaotada(a, i, j) on

1 Vali p juhuslikult hulgast $\{i, i+1, \ldots, j\}$
2 $a_i :=: a_p$
3 **return** jaotada(a, i, j) --- *vt. joonist 4.4*

Juhuslikult valides peab igal elemendil olema sama suur tõenäosus valituks saada.

randomiseeritud_kiir_sorteerida(a, i, j) on

1 **if** $i \geqslant j$ **then return**
2 $k :=$ randomiseeritud_jaotada(a, i, j)
3 randomiseeritud_kiir_sorteerida(a, i, k)
4 randomiseeritud_kiir_sorteerida$(a, k+1, j)$

Randomiseeritud kiirmeetodi tööaeg ei sõltu sisendmassiivi kirjete järjekorrast.

Tõepoolest, protseduur jaotada võtab „veelahkmeks“ esimese elemendi, protseduur randomiseeritud_jaotada seega juhuslikult ükskõik millise elemendi.

Leiame randomiseeritud kiirmeetodi keskmise tööaja $T(n)$.

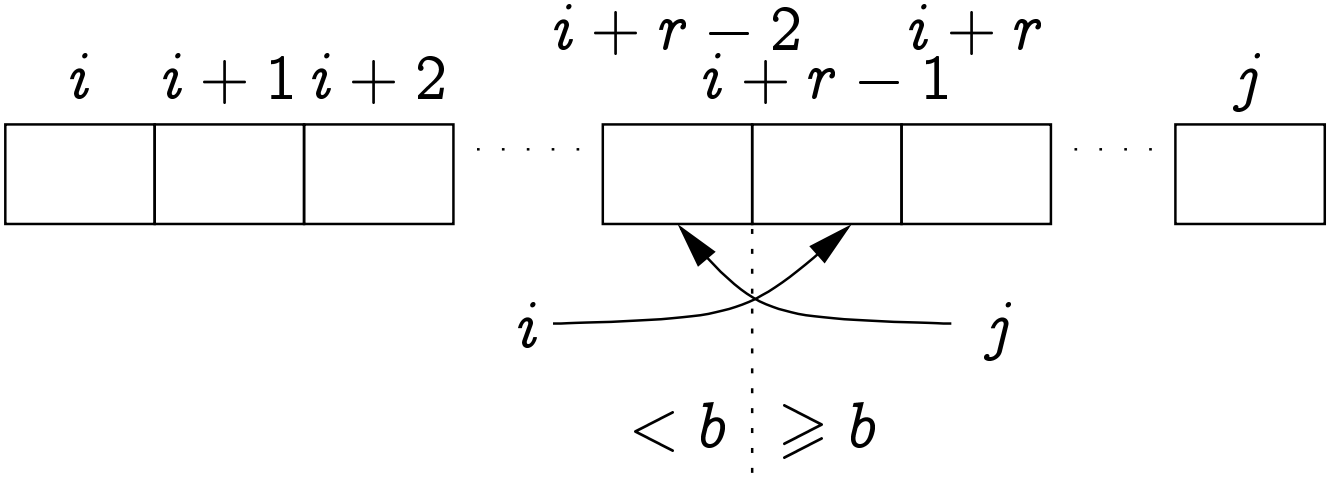
Analüüsi lihtsustamiseks loeme, et kõik massiivielemendid (s.t. kõigi elementide võtmed) on erinevad.

Kui $k := \text{randomiseeritud_jaotada}(a, i, j)$, siis k väärtuseks võib saada $i, i+1, \ldots, j-1$. Millise tõenäosusega saab k ühe või teise väärtuse?

Kui veelahkmeks $b = a_i$ on protseduuris jaotada (joonis 4.4) vähim element lõigus $i..j$, siis on lõpuks i ja j väärtuseks esialgne i väärtus, s.t. $k = i$.

Kui veelahkmeks $b = a_i$ on suuruselt r-s element, kus $r \in \{2, \ldots, j - i + 1\}$, siis kõigepealt vahetatakse omavahel a_i ja kõige kaugemal asuv b-st väiksem element.

Seis vahetult enne jaotada-st väljumist:



Tagastatakse j.

k väärtuseks saab $i + r - 2$.

Tõenäosus, et $k = i$, on $\frac{2}{j-i+1}$.

Tõenäosus, et k on võrdne mingi muu fikseeritud väärtusega lõigust $i + 1..j - 1$, on $\frac{1}{j-i+1}$.

Meil on

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot \big(T(i) + T(n-i)\big) + \Theta(n),$$

kus λ_i on tõenäosus, et ülesande suurusega n lahendamiseks peame me lahendama alamülesanded suurusega i ja $n - i$.

Eelneva arutelu põhjal $\lambda_1 = 2/n$ ja $\lambda_i = 1/n$, kui $i \neq 1$.

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1) + \sum_{i=1}^{n-1}\big(T(i) + T(n-i)\big)\right) + \Theta(n)$$

Siin $\frac{1}{n}(T(1) + T(n-1))$ on $O(n)$, sest $T(n-1)$ on $O(n^2)$. See järeldub eespool olnud halvima juhu analüüsist.

Võime lugeda, et liige $\frac{1}{n}(T(1) + T(n-1))$ on liikme $\Theta(n)$ sees. Siis

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\big(T(i) + T(n-i)\big) + \Theta(n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + \Theta(n) \ .$$

Näitame, et mingite konstantide a ja b jaoks $T(n) \leqslant an \log n + b$. Tõestus on induktsiooniga üle n.

Kui $n = 1$, siis tähendab see võrratus, et $T(1) \leqslant b$. Me võime valida b piisavalt suure selleks, et see võrratus kehtiks.

Kui $n > 1$, siis

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + \Theta(n) \leqslant \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(ai \log i + b) + \Theta(n) = \frac{2a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i \log i + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \ .$$

Hindame summat $\sum_{i=1}^{n-1} i \log i$.

Järgnev hinnang on liiga jäme:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \log i \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} i \log n = \log n \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \frac{1}{2} n^2 \log n \ .$$

Seda hinnangut kasutades saame

$$T(n) \leqslant \frac{2a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \log i + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \leqslant$$

$$an \log n + b + \left(\frac{n-2}{n} b + \Theta(n)\right) \not\leqslant an \log n + b \ .$$

Järgnevas hindame summat $\sum_{i=1}^{n-1} i \log i$ täpsemalt.

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \log i = \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} i \log i + \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} i \log i \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} i \log (n/2) + \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} i \log n =$$

$$(\log n - 1) \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} i + \log n \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} i =$$

$$\log n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} i \leqslant$$

$$\log n \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2$$

Seda hinnangut kasutades saame

$$T(n) \leqslant \frac{2a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \log i + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \leqslant$$

$$\frac{2a}{n}\left(\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{8}n^2\right) + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \leqslant$$

$$an \log n - \frac{a}{4}n + 2b + \Theta(n) = an \log n + b + \left(\Theta(n) + b - \frac{a}{4}n\right) \quad .$$

Me võime valida a piisavalt suure selleks, et $\frac{a}{4}n \geqslant \Theta(n) + b$.
Siis $T(n) \leqslant an \log n + b$.

S.t. randomiseeritud kiirmeetodi keskmine tööaeg on $\Theta(n \log n)$.

Sorteerimine ühildusmeetodil (joonis 4.6):

- Jaga massiiv kaheks (enam-vähem) võrdse suurusega pooleks.
- Sorteeri mõlemad pooled.
- Ühilda need sorteeritud pooled.

Sobib lihtahelate sorteerimiseks, on stabiilne.

Keerukus: $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$, sest ühildamise keerukus on $\Theta(n)$. Põhiteoreemi järgi siis $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Sorteerimine kuhjameetodil (joonis 3.12):

Olgu kuhjaomaduseks „ühegi tipu võti pole suurem kui ühegi tema järglase võti“ (s.t. vastupidine eelmise loenguga). Siis on kahendkuhja juurtipus kõige väiksema võtmeväärtusega kirje.

Meetod:

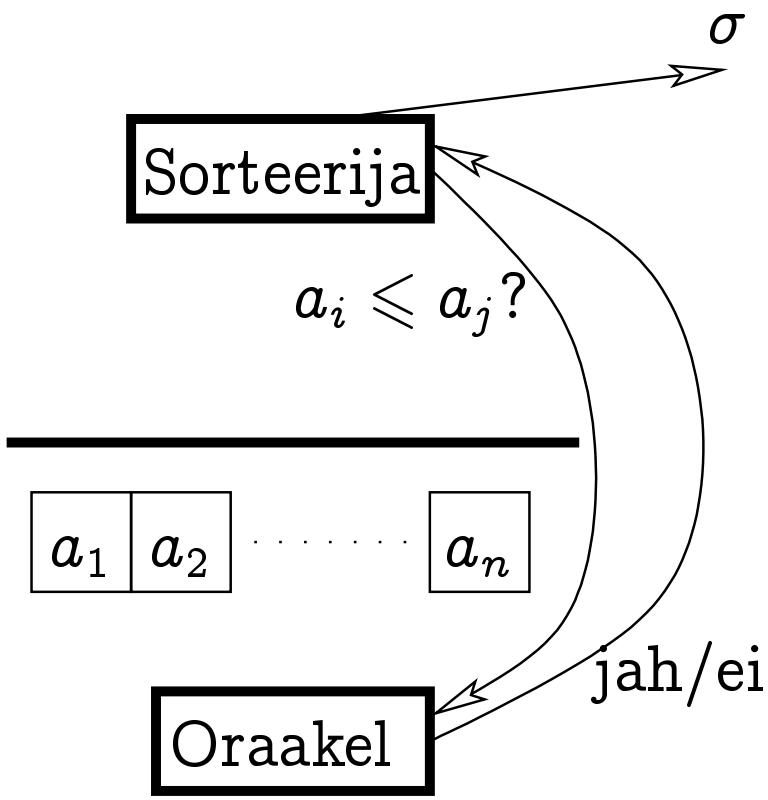
- Tee massiivist kuhi (joonis 3.11).
- Võta kuhjast vähimat elementi senikaua, kuni kuhi tühjaks saab.

Keerukus: esimene samm on $\Theta(n)$, teises sammus tuleb n korda teha võtmist, mille keerukus on $\Theta(\log n)$. Kokku $\Theta(n \log n)$.

Erinevate sorteerimismeetodite ajalises keerukuses on Θ sisse peidetud konstandid erineva suurusega, seetõttu võivad väikestel sisenditel asümptootiliselt aeglasemad algoritmid kiiremad olla (vt. joonis 4.5).

Paari loengu pärast näeme, kuidas panna kiirmeetod töö-le halvimal juhul ajaga $\Theta(n \log n)$ („veelahe“ tuleb hästi valida; see on ka deterministlikult võimalik).

Vaadeldud sorteerimismeetodid põhinesid elementide võrdlemisel:



Lõpuks peab sorteerija väljastama sellise σ, et $a_{\sigma(1)} \leqslant a_{\sigma(2)} \leqslant \cdots \leqslant a_{\sigma(n)}$.

Mitu võrdlemist on halvimal juhul vähemalt vaja?

Olgu hulgas X n elementi.

Alice on välja valinud mingi $x \in X$. Bob tahab teada, millise elemendi Alice valis.

Alice on nõus vastama selle elemendi kohta käivatele kas-küsimustele.

Mitu küsimust peab Bob halvimal juhul esitama, et teada saada, millise elemendi Alice valis?

Kui Bob pole veel midagi küsinud, siis võib elemendiks x olla (Bobi jaoks) ükskõik milline X-i element, s.t. on n võimalust.

Kui Bob on esitanud ühe küsimuse, siis halvemal juhul on veel järgi vähemalt $n/2$ võimalust.

Kui Bob on esitanud kaks küsimust, siis halvemal juhul on veel järgi vähemalt $n/4$ võimalust.

Kui Bob on esitanud k küsimust, siis halvemal juhul on veel järgi vähemalt $n/2^k$ võimalust.

Seega peab küsimusi olema vähemalt $\lceil \log n \rceil$.

Sorteerimisel on võimaluste arv $n!$, neist tuleb välja valida üks (kui kõik sorteeritavad elemendid on erinevad).

Halvemal juhul on siis võrdlemisi vähemalt

$$\log n! = \sum_{i=1}^{n} \log i \geqslant \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log i \geqslant \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log \lceil n/2 \rceil \geqslant$$
$$\lceil n/2 \rceil \log \lceil n/2 \rceil = \Omega(n \log n) \ .$$

(Samas muidugi ka $\log n! \leqslant \log n^n = n \log n$.)

Kui kasutada ka midagi muud peale elementide võrdlemiste, siis õnnestub sorteerida kiiremini kui keerukusega $\Theta(n \log n)$.

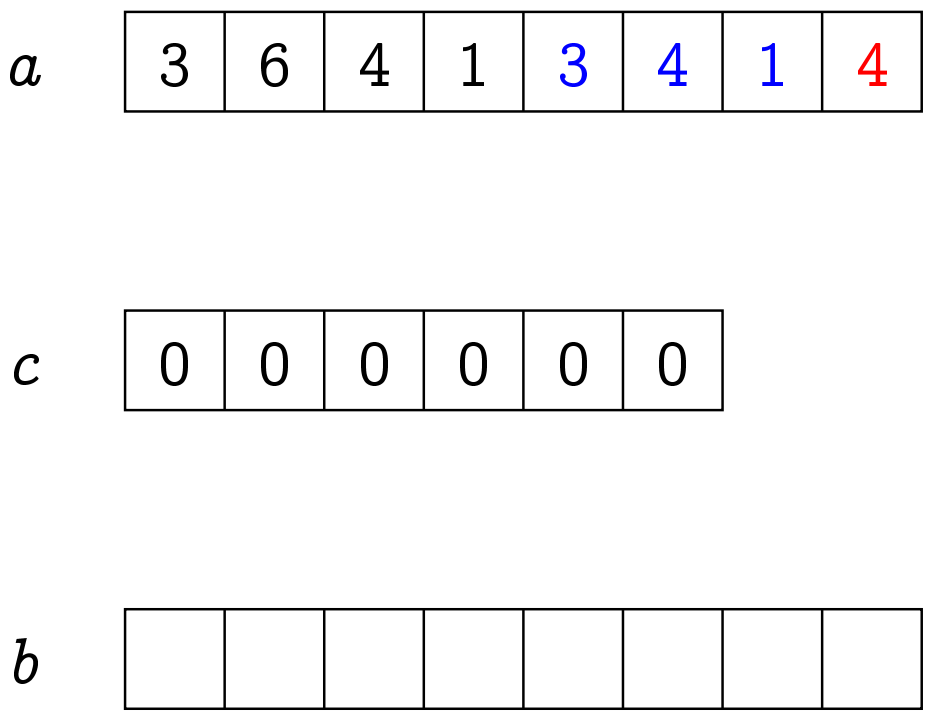
Seejuures tuleb sorteeritavate võtmete kohta midagi eeldada. Samuti kasutavad kõik meetodid täiendavalt mälu suuruses $\Theta(n)$.

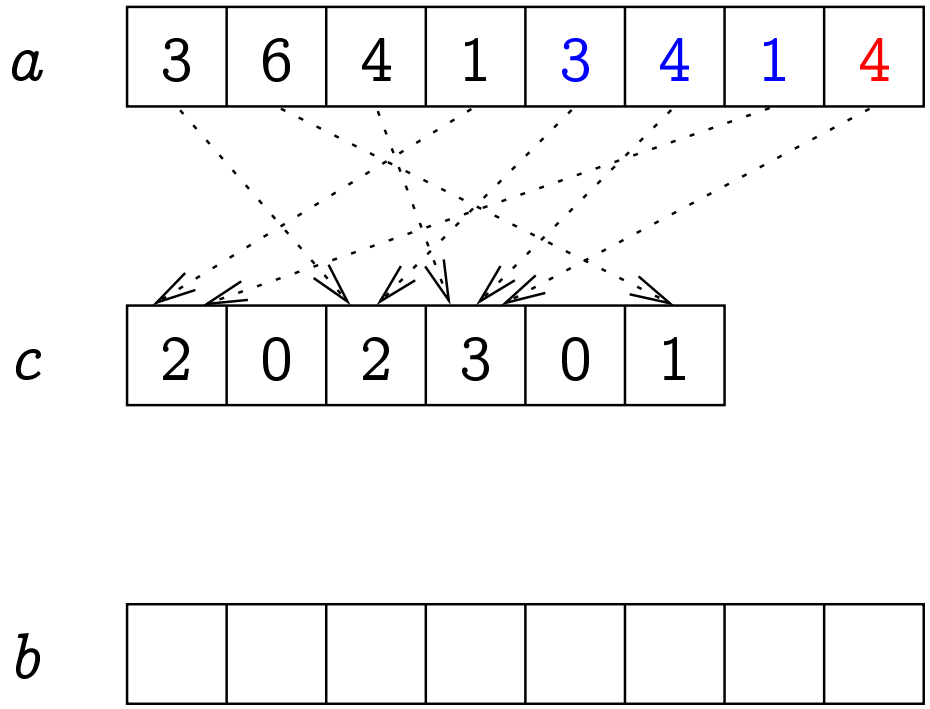
Loendamismeetodil eeldatakse, et kõik võtmed on täisarvud hulgast $\{1, \ldots, k\}$. Kirjete $a_1, \ldots, a_n$ sorteerimiseks vajatakse täiendavalt sama suurt massiivi b ja võtmemassiivi c suurusega k.

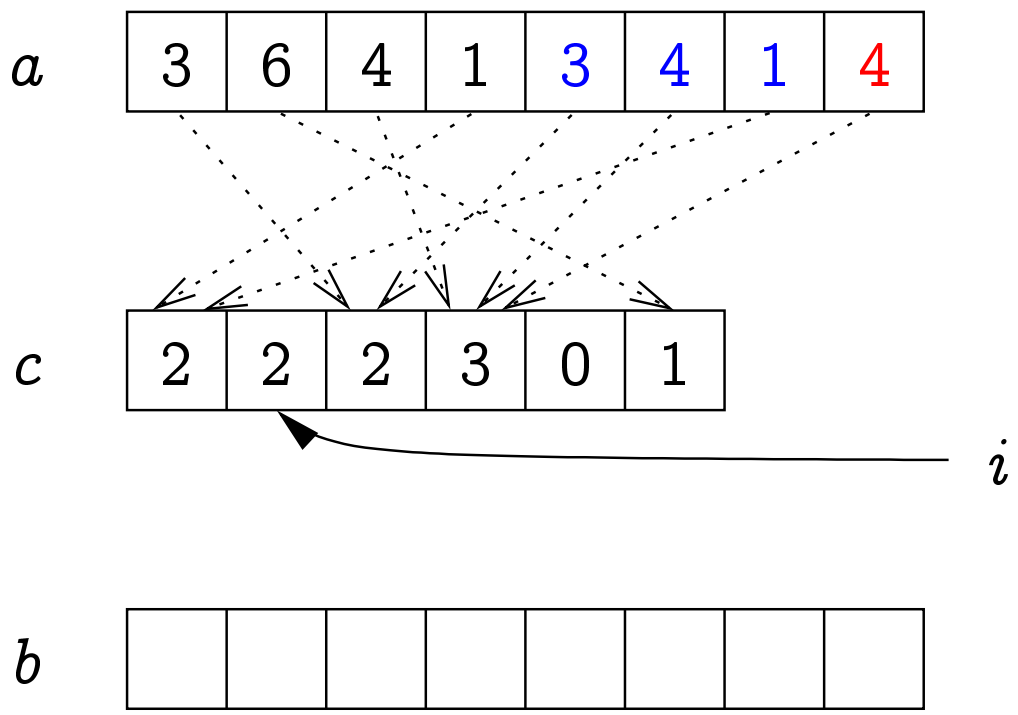
- Välja c_i väärtuseks võta võtme i esinemiste arv massiivis a.
  - Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ jaoks suurenda c_{a_i} väärtust ühe võrra.
- Välja c_i väärtuseks võta võtmete $\leqslant i$ esinemiste arv massiivis a.
  - Kui c_{i-1} on võtmete $\leqslant (i-1)$ esinemiste arv ja c_i võtmete i esinemiste arv, siis võta $c_i := c_i + c_{i-1}$.
  - i muutub 2-st k-ni.

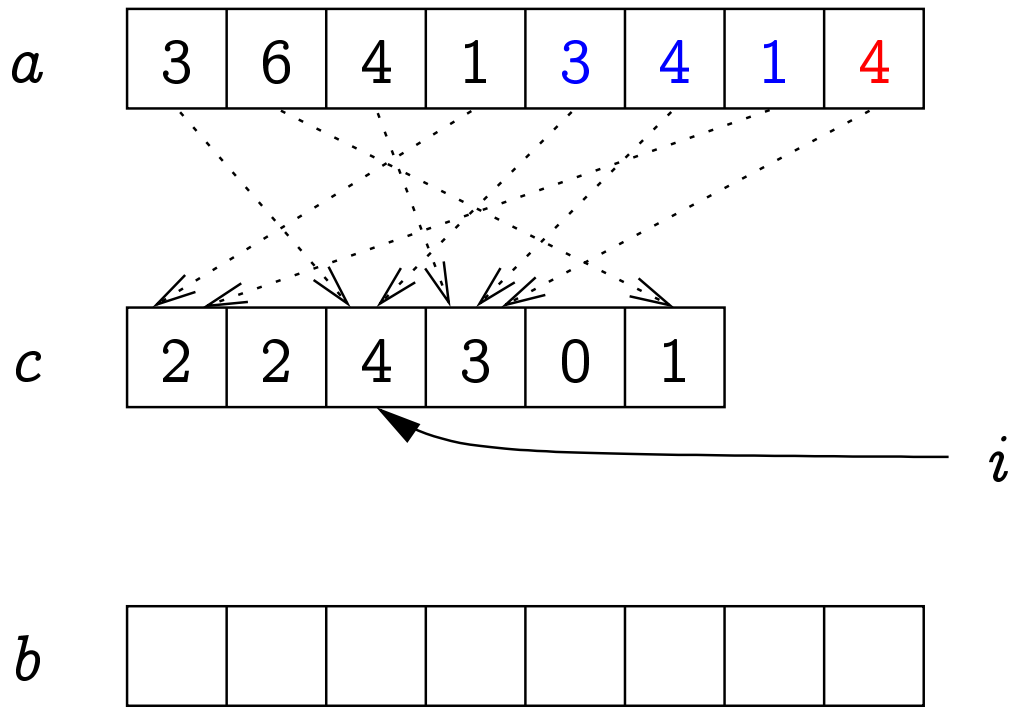
...

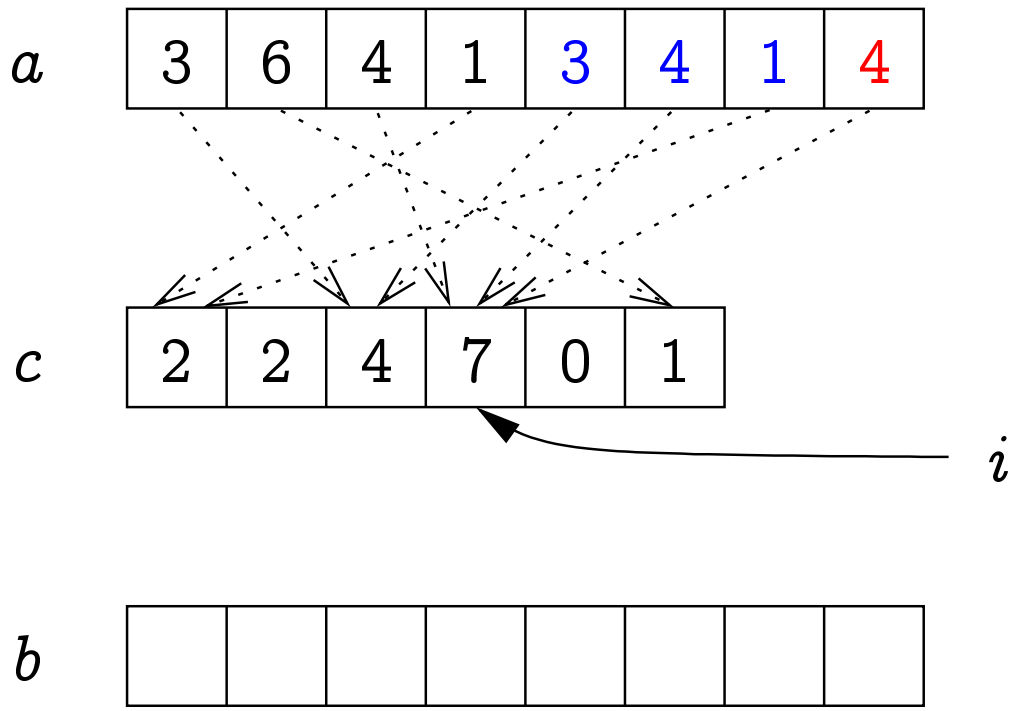
- Massiivi b väljadeks $c_{x-1}+1$ kuni c_x võta massiivi a kirjed võtmetega x.
  - Iga $i \in \{1,\ldots,n\}$ jaoks võta $b_{c_{a_i}}$ väärtuseks a_i ning vähenda c_{a_i} väärtust ühe võrra.
  - Kui seda teha i kahanemise järjekorras, siis on meetod stabiilne.
- Tagasta b.

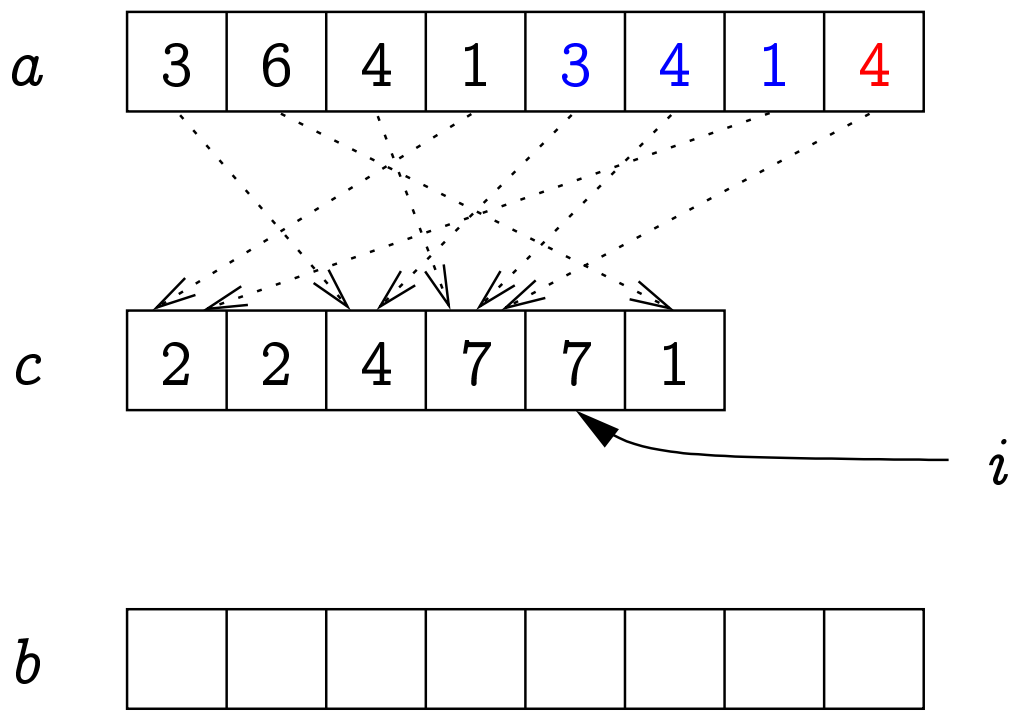

a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 0 0 0 0 0
b

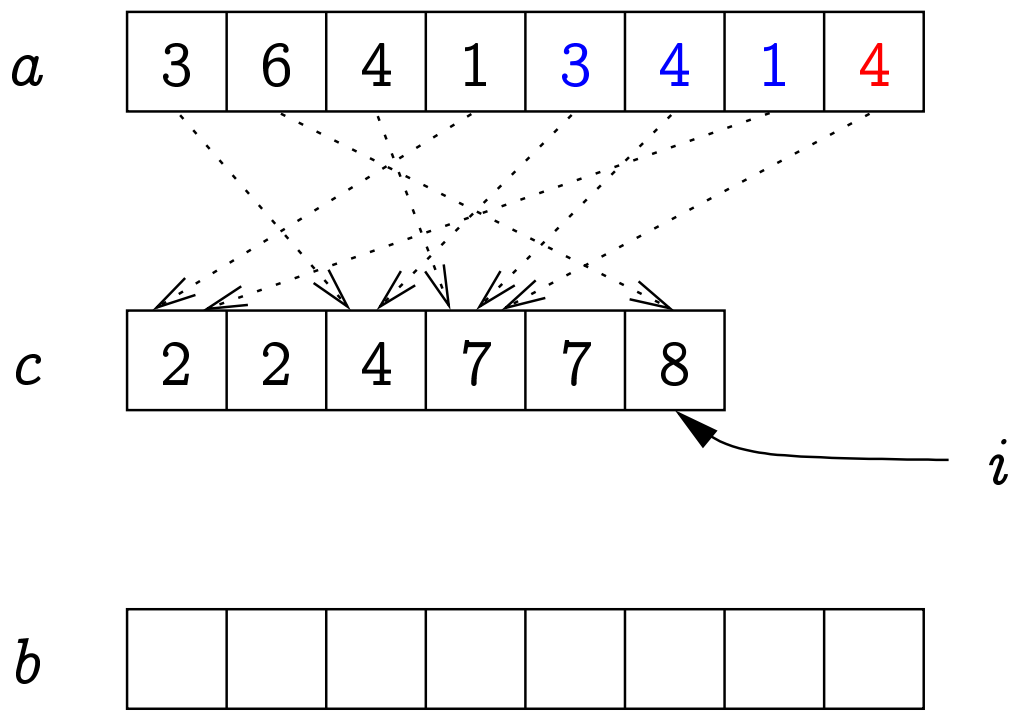

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
0
2
3
0
1
b

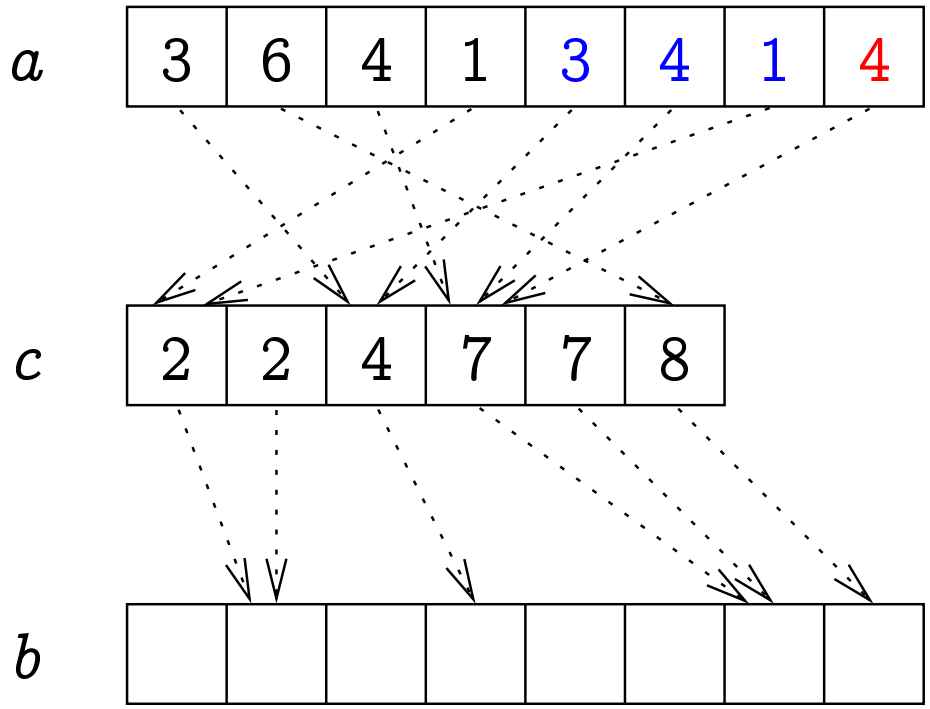

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
2
2
3
0
1
i
b

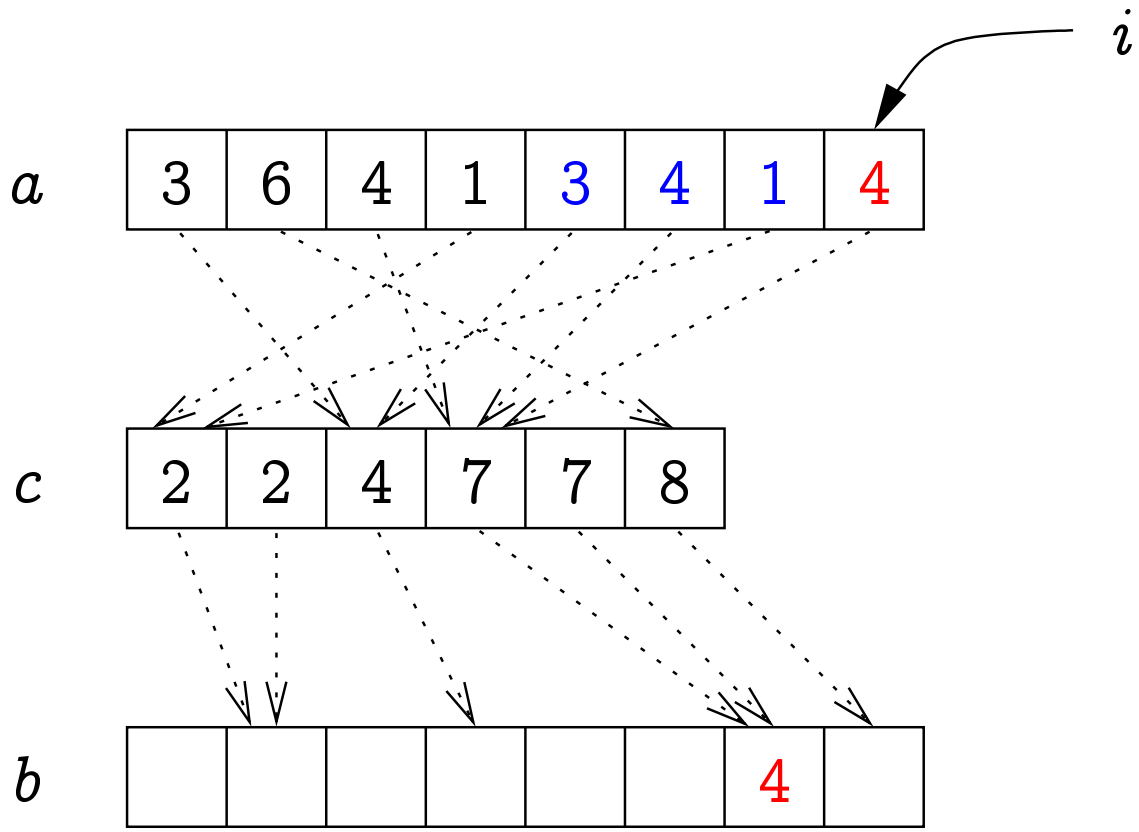

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
2
4
3
0
1
i
b

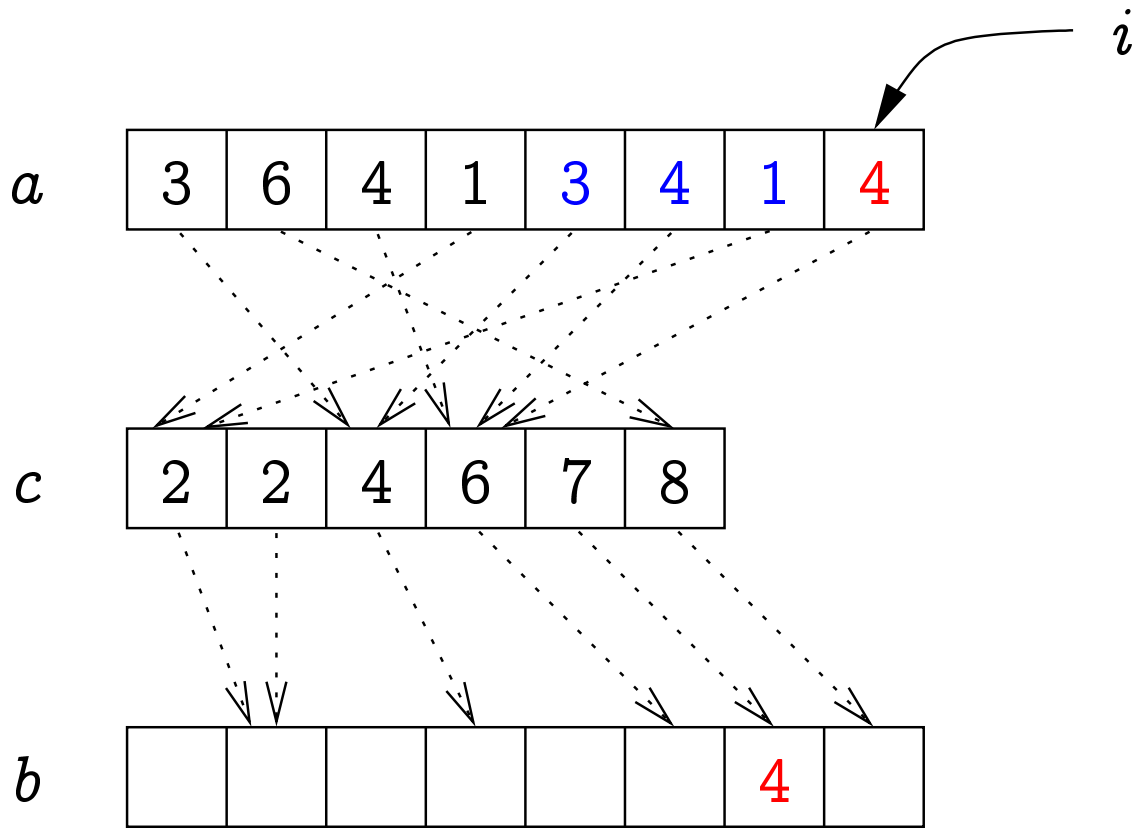

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
2
4
7
0
1
i
b

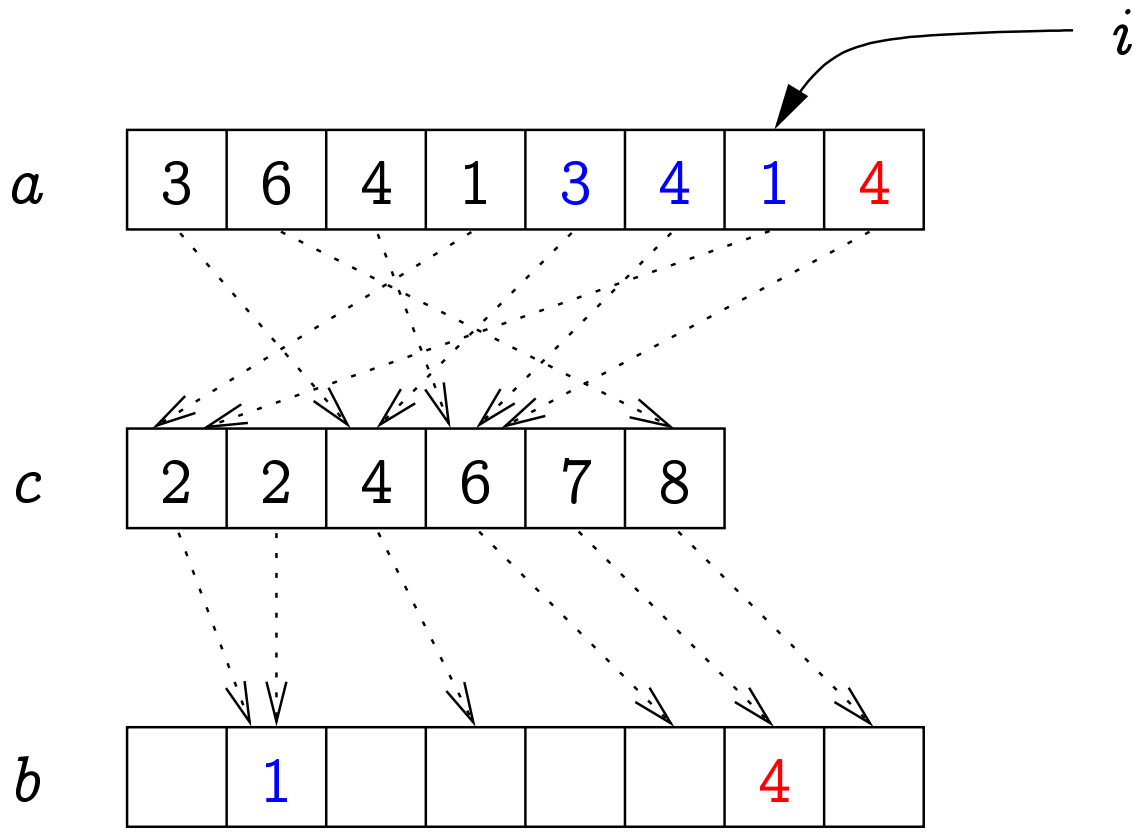

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
2
4
7
7
1
i
b

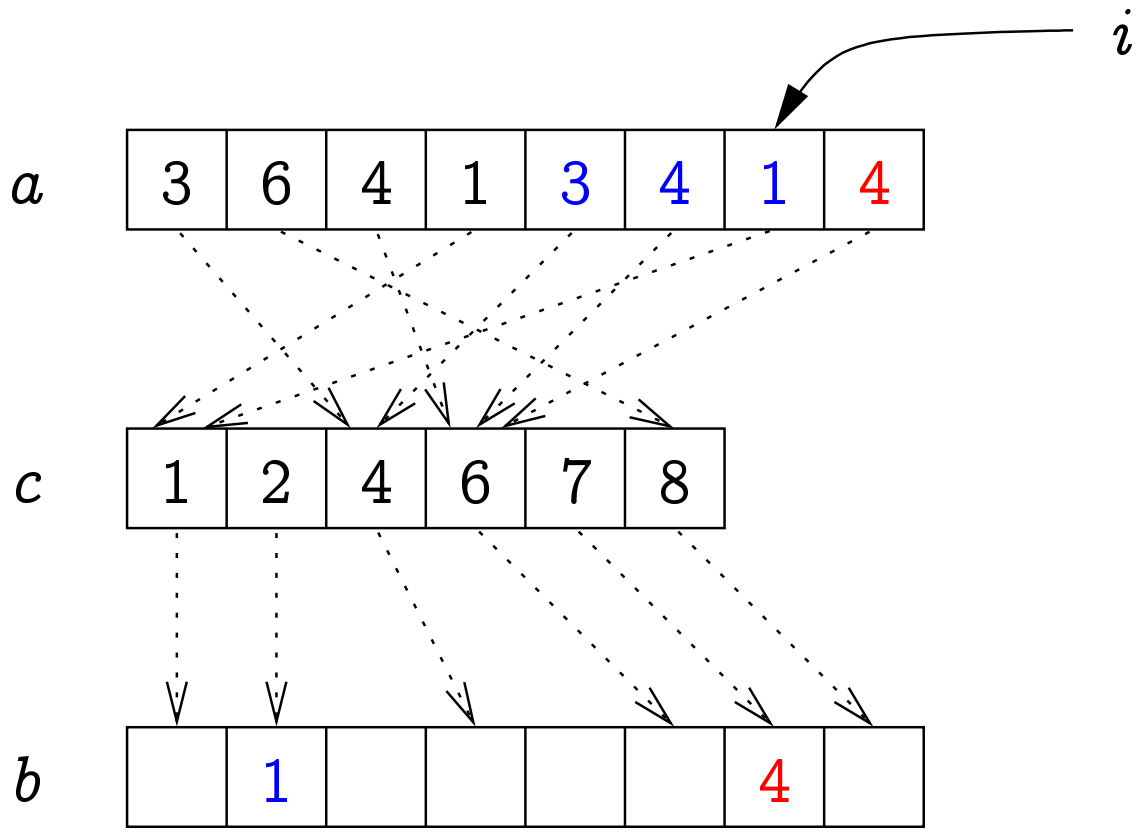

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
2
4
7
7
8
i
b

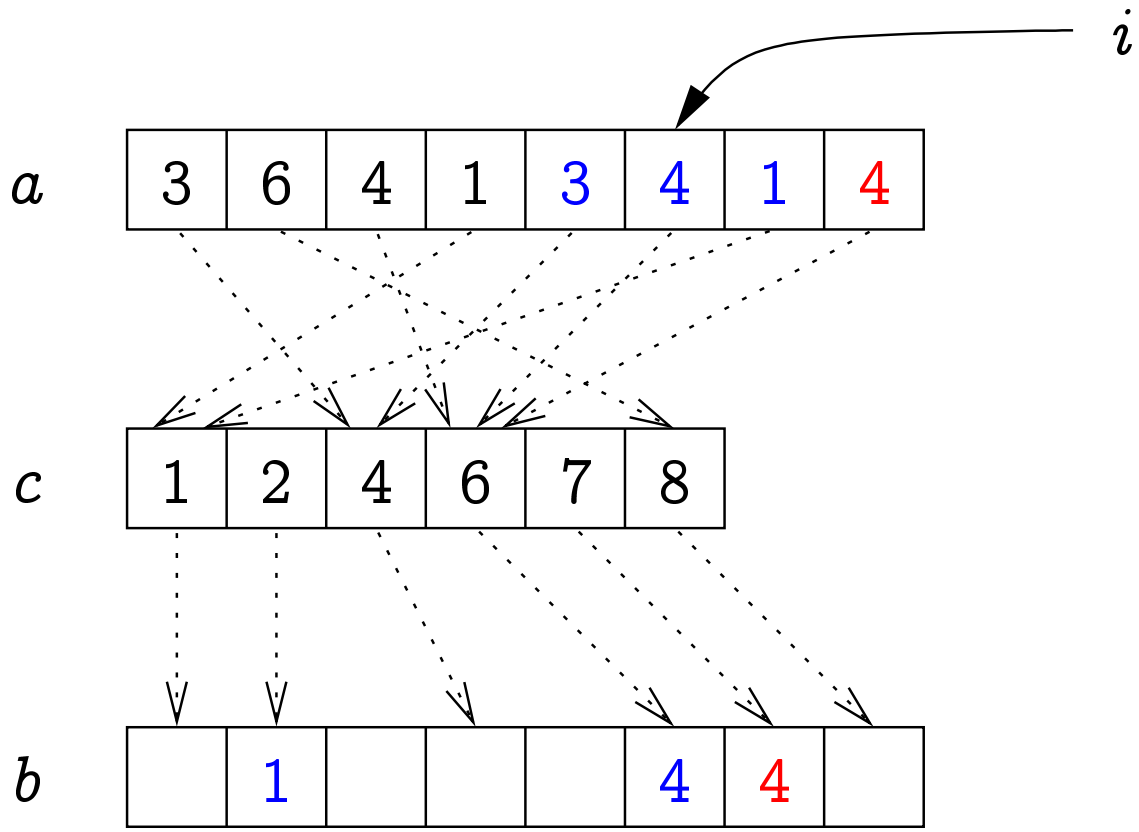

a
3
6
4
1
3
4
1
4
c
2
2
4
7
7
8
b

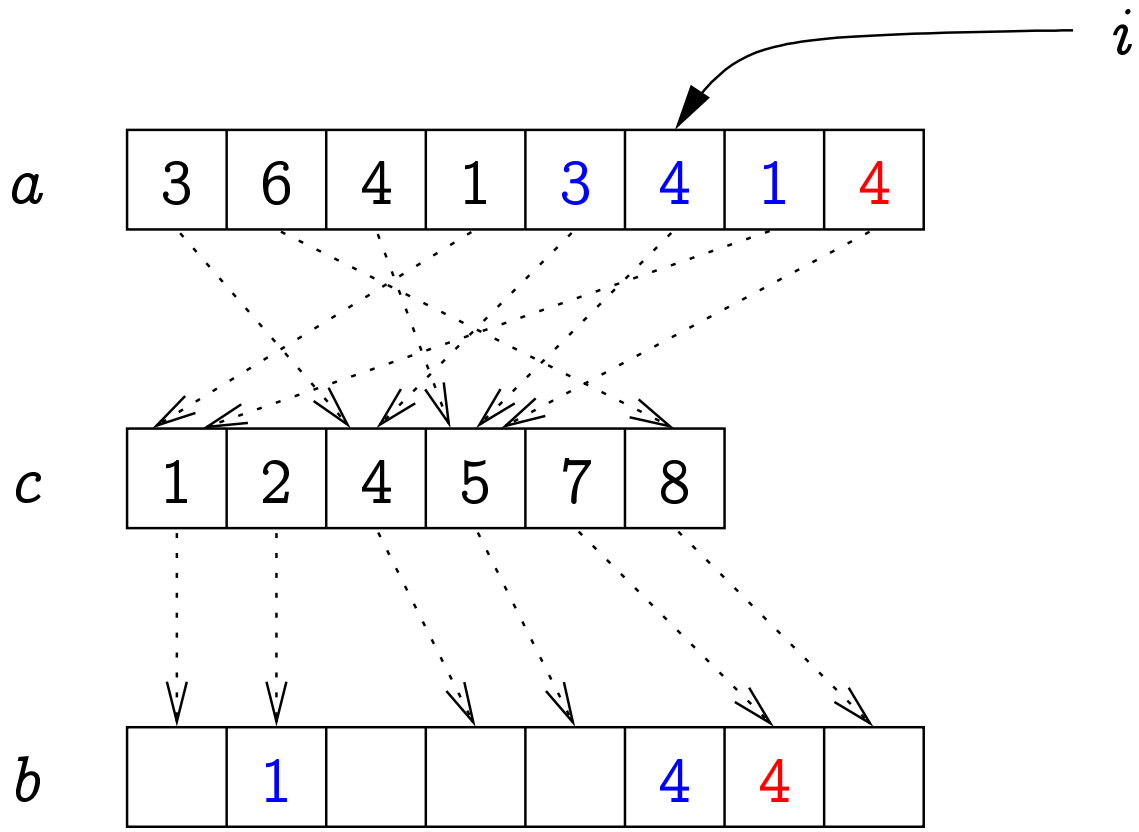

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
2 2 4 7 7 8
b
4

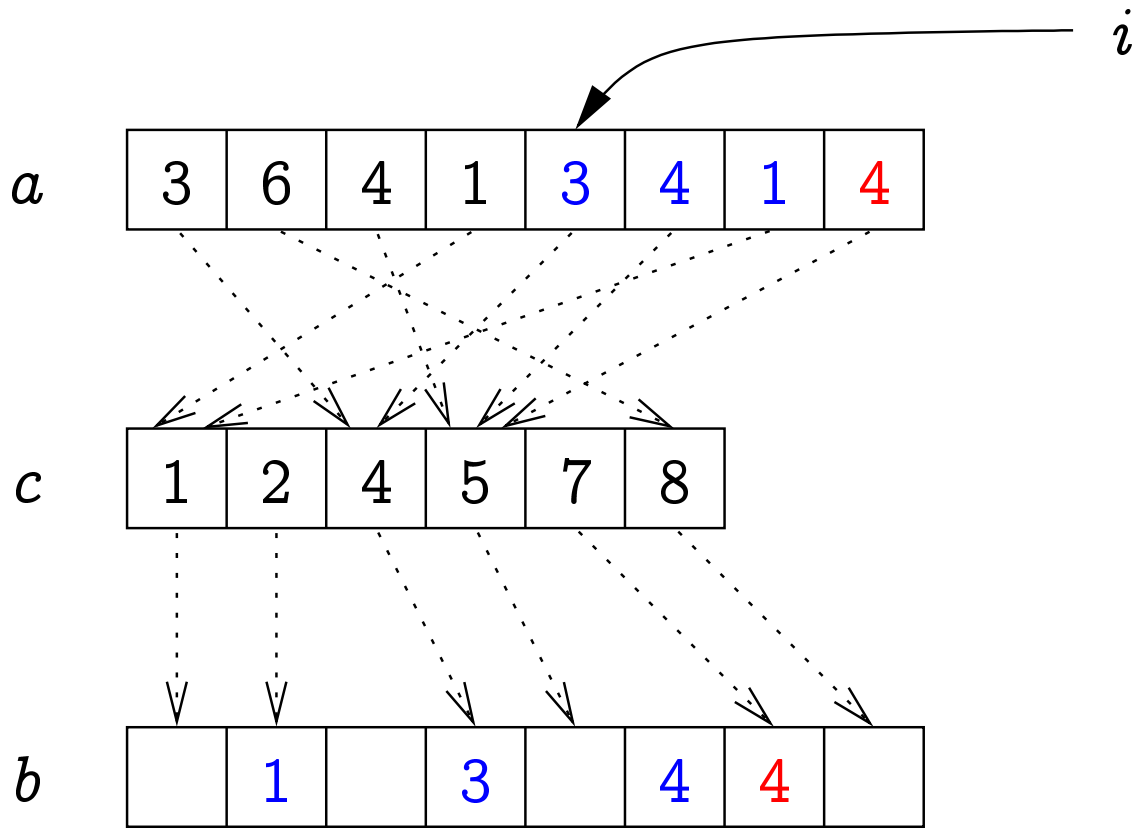

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
2 2 4 6 7 8
b
4

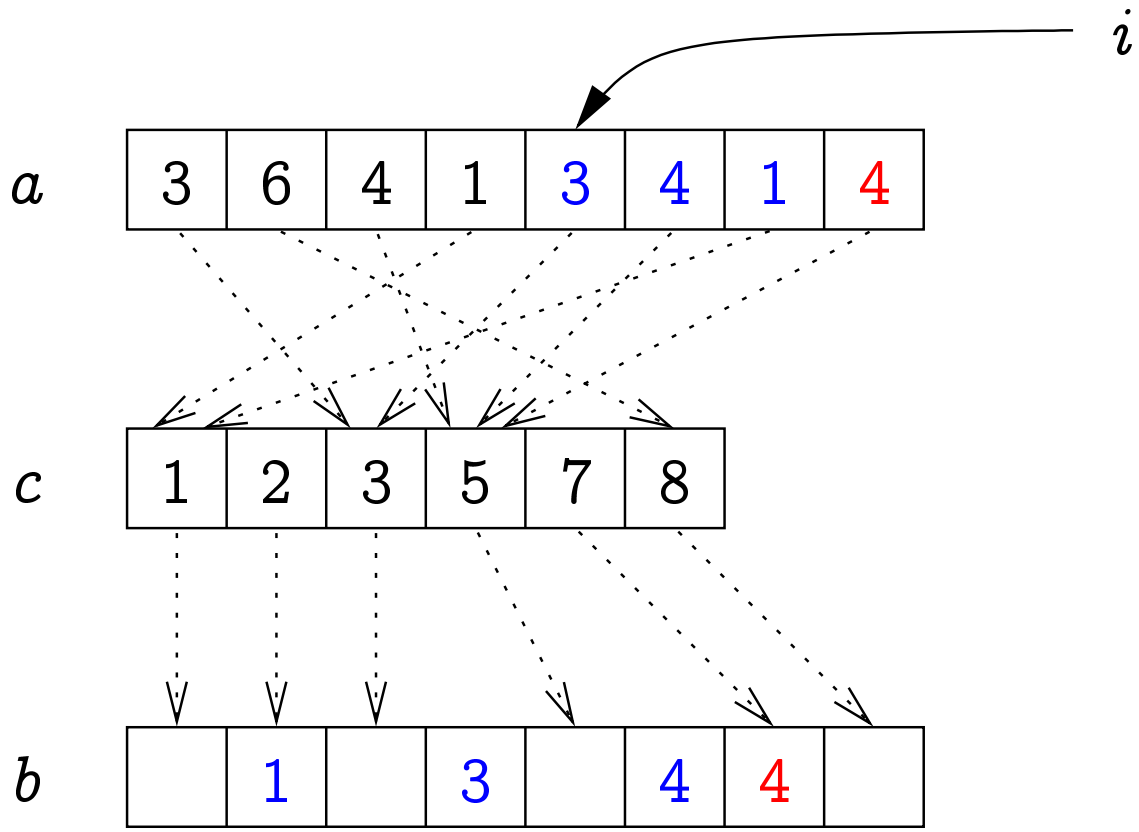

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
2 2 4 6 7 8
b
1 4

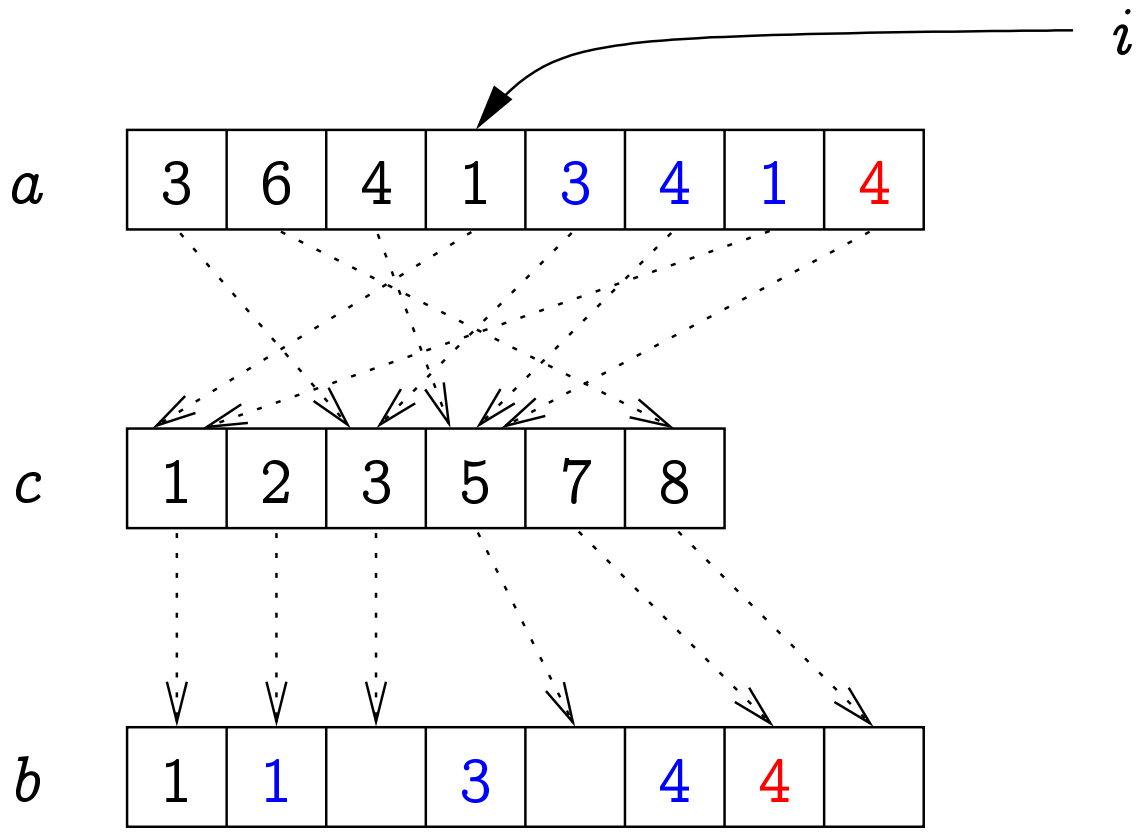

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
1 2 4 6 7 8
b
1 4

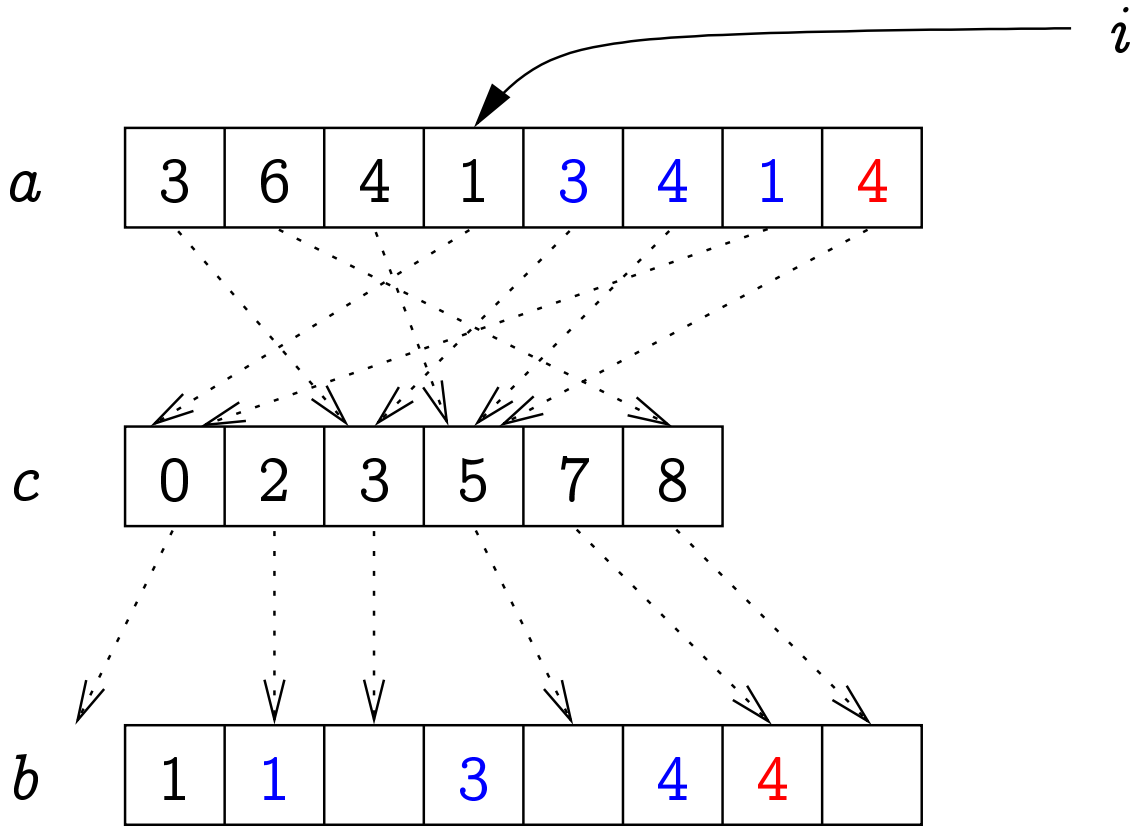

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
1 2 4 6 7 8
b
1 4 4

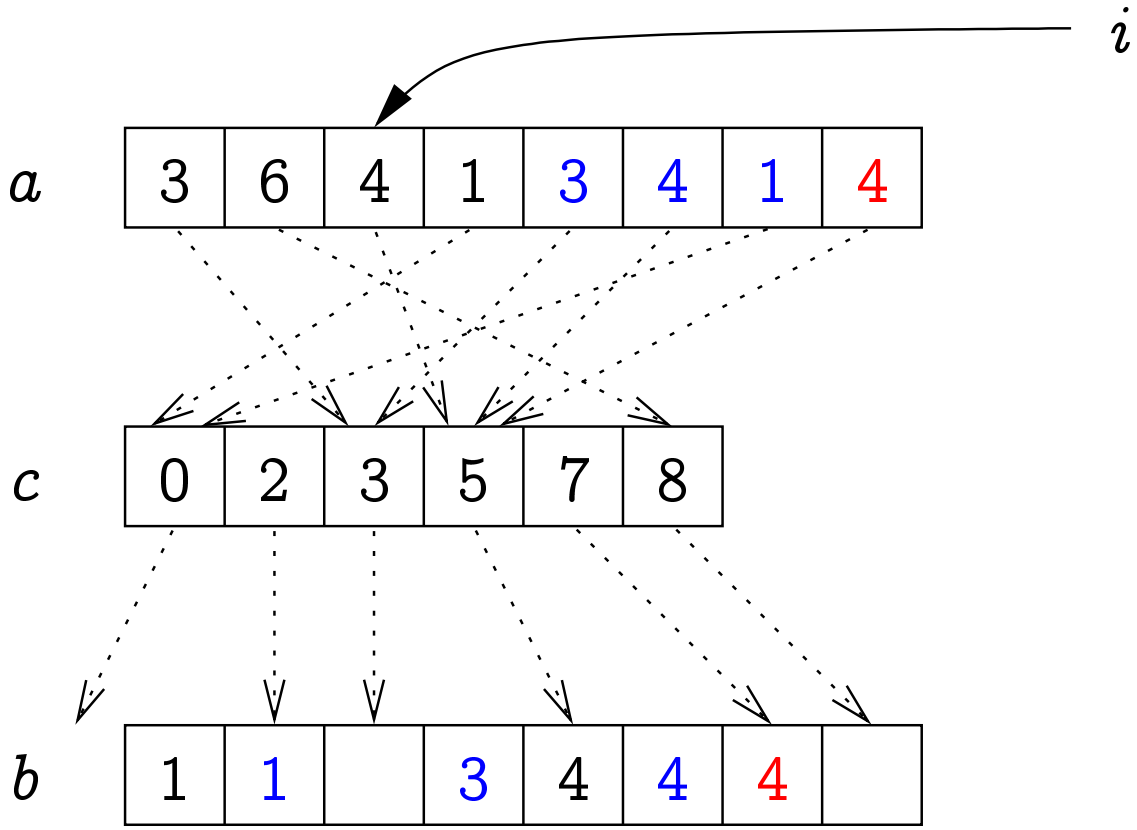

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
1 2 4 5 7 8
b
1 4 4

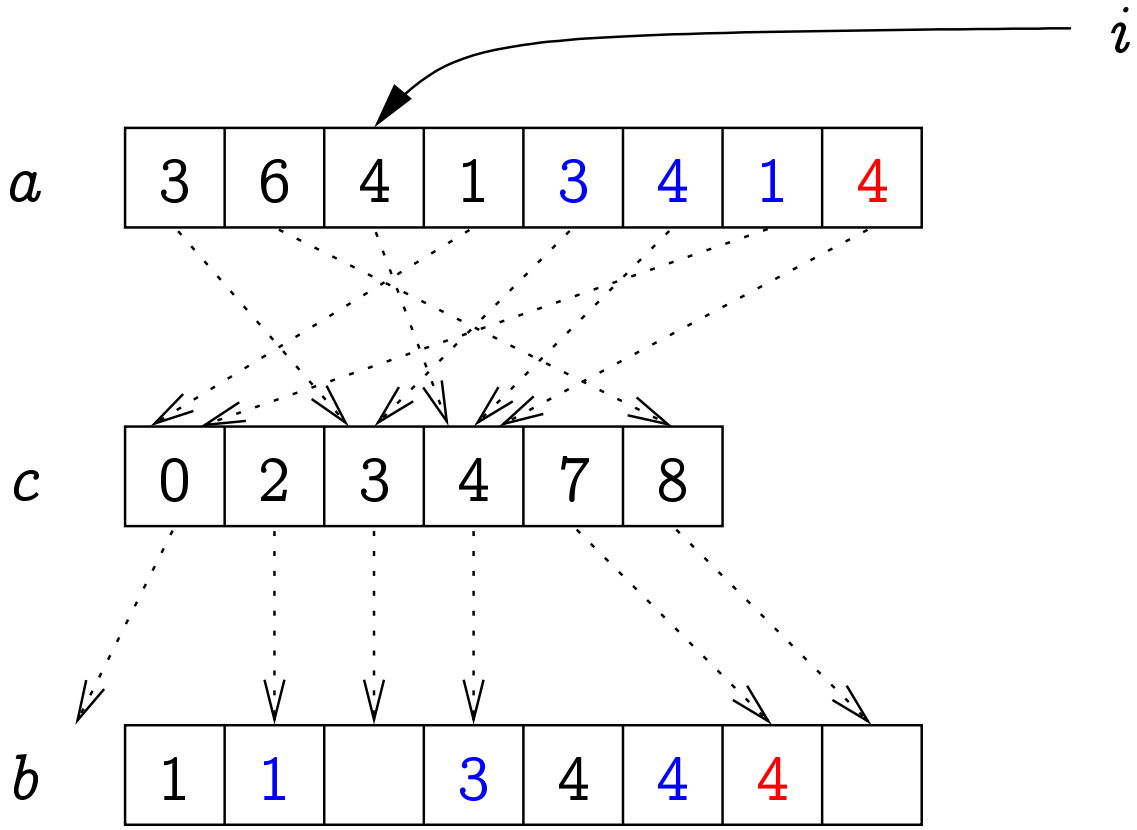

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
1 2 4 5 7 8
b
1 3 4 4

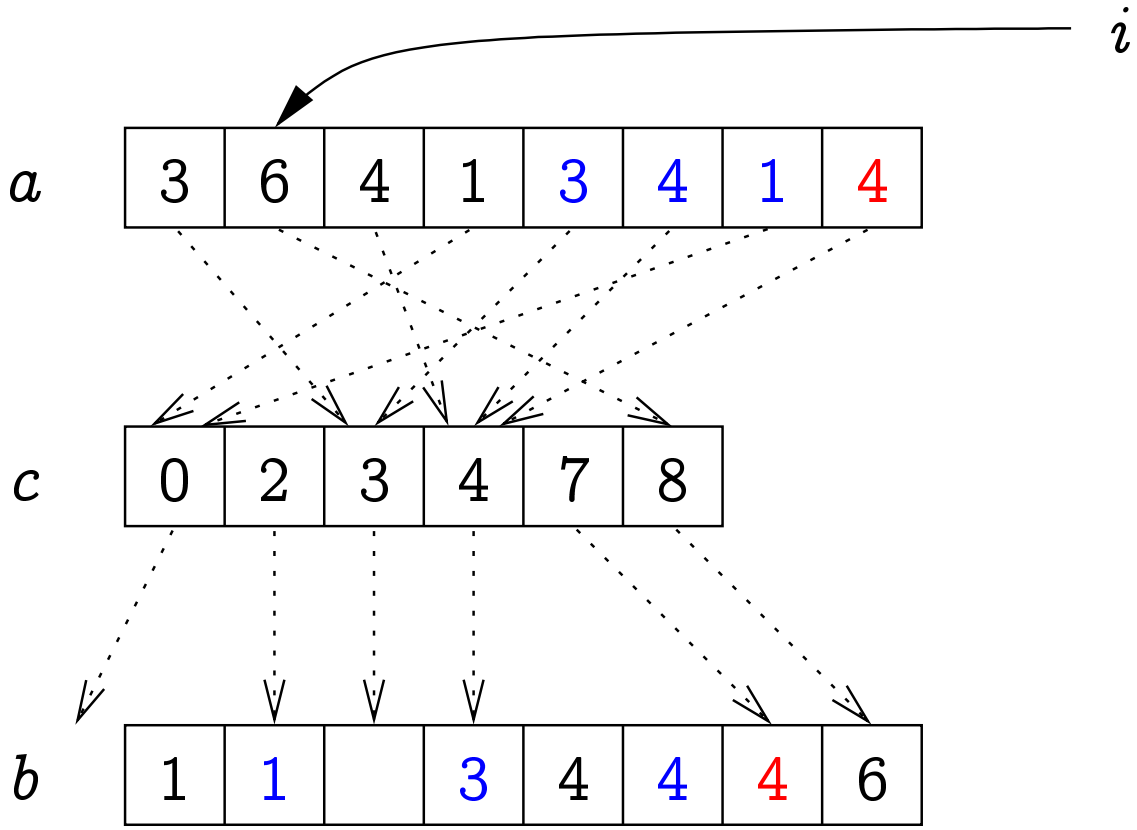

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
1 2 3 5 7 8
b
1 3 4 4

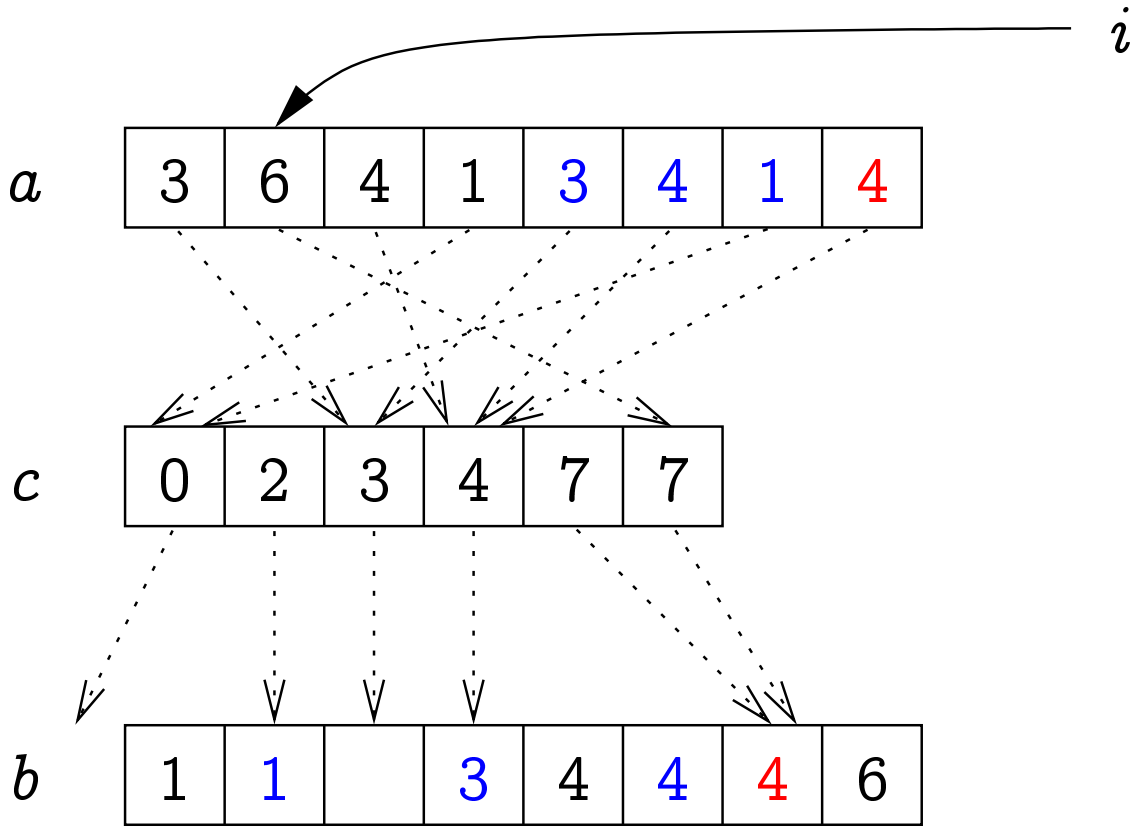

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
1 2 3 5 7 8
b
1 1 3 4 4

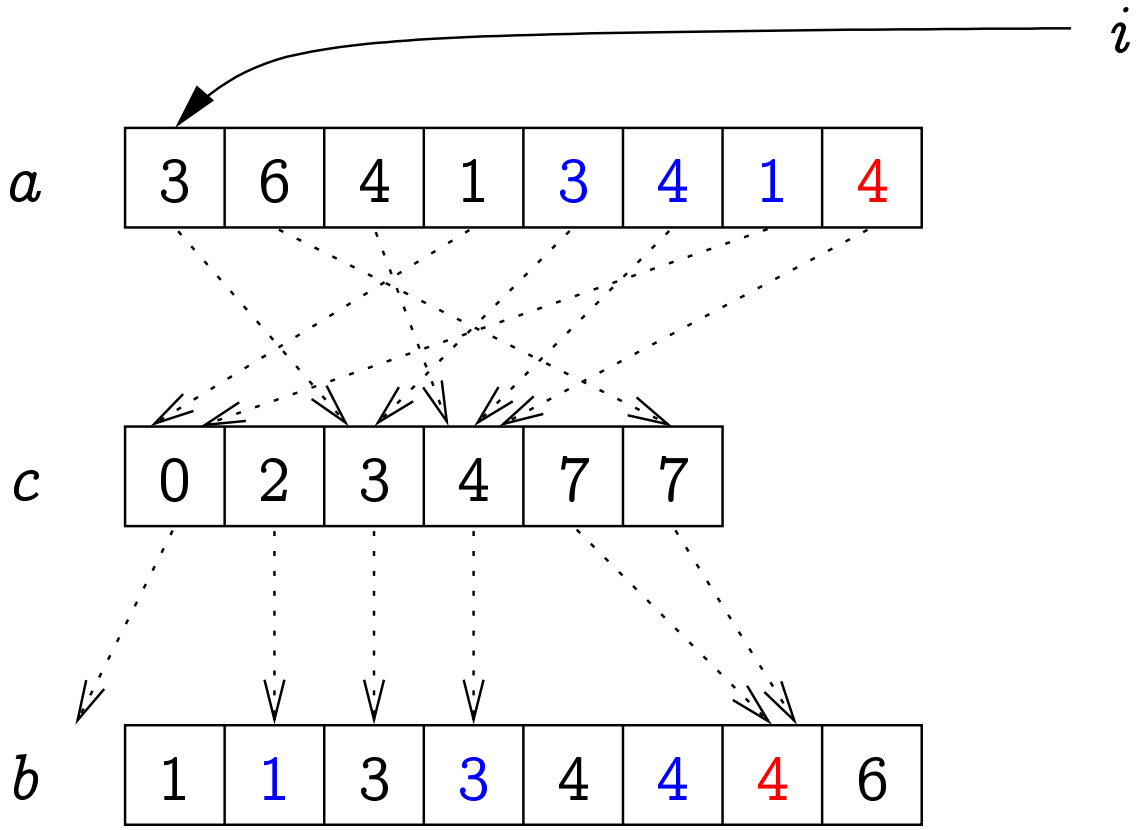

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 3 5 7 8
b
1 1 3 4 4

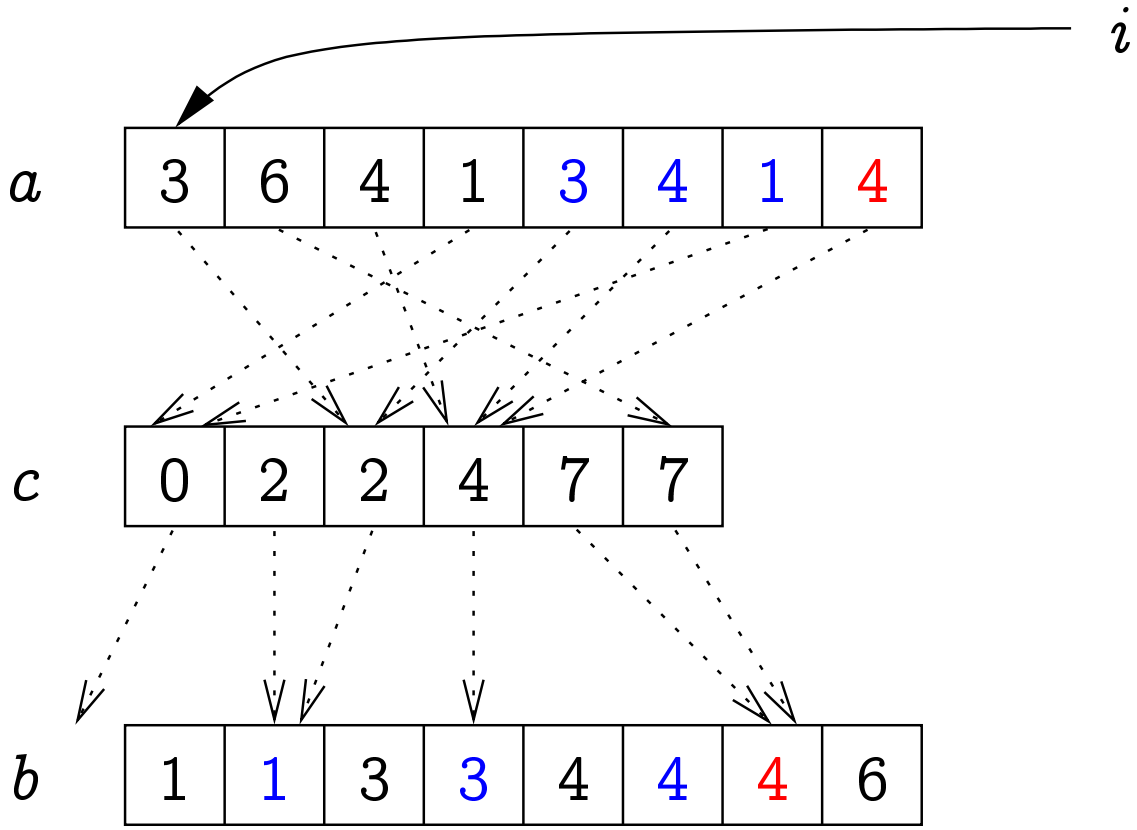

i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 3 5 7 8
b
1 1 3 4 4 4


i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 3 4 7 8
b
1 1 3 4 4 4


i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 3 4 7 8
b
1 1 3 4 4 4 6


i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 3 4 7 7
b
1 1 3 4 4 4 6


i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 3 4 7 7
b
1 1 3 3 4 4 4 6


i
a
3 6 4 1 3 4 1 4
c
0 2 2 4 7 7
b
1 1 3 3 4 4 4 6

Positsioonimeetodil eeldatakse, et võti on kujul

$$(võti_1, võti_2, \ldots, võti_d)$$

ning järjestus on defineeritud leksikograafiliselt.

Algoritm:

1 **for** $j = d$ **downto** 1 **do**
2 Sorteeri a võtme $võti_j$ järgi, kasutades stabiilset meetodit.

Lause. Tsüklis, rea 2 järel on a sorteeritud

$$(võti_j, võti_{j+1}, \ldots, võti_d)$$

järgi.

Tõestus induktsiooniga. Baas, $j = d$ on ilmne.

Samm. Olgu a sorteeritud

$$(v\tilde{o}ti_{j+1}, v\tilde{o}ti_{j+2}, \ldots, v\tilde{o}ti_d)$$

järgi. Sorteerime ta stabiilselt $v\tilde{o}ti_j$ järgi.

Vaatame kirjeid a_k ja a_l. Kui $a_k.v\tilde{o}ti_j$ ja $a_l.v\tilde{o}ti_j$ on erinevad, siis pärast sorteerimist $v\tilde{o}ti_j$ järgi asuvad nad õiges järjekorras.

Kui $a_k.v\tilde{o}ti_j = a_l.v\tilde{o}ti_j$, siis pärast sorteerimist on nad samas järjekorras kui enne. Induktsiooni eelduse kohaselt olid nad enne positsioonide $j+1, \ldots, d$ järgi sorteeritud. Seega on nad õiges järjekorras.

Kimbumeetodil eeldatakse, et võtmed on reaalarvud vahemikust 0 (kaasa arvatud) kuni 1 (välja arvatud). Samuti eeldatakse, et nad on ühtlaselt ja üksteisest sõltumatult jaotunud.

Ühtlane jaotus tähendab, et kui $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < 1$, siis kui valime juhuslikult mingi a ja seejärel mingi $i \in \{1, \ldots, n\}$ (tõenäosus, et i saab mingi konkreetse väärtuse, on $1/n$), siis on sündmuse $\alpha \leqslant a_i \leqslant \beta$ tõenäosus $\frac{1}{\beta - \alpha}$.

Algoritm:

- Initsialiseerime n lihtahelat $p_0, \ldots, p_{n-1}$.
- Käime a läbi ning lisame elemendi a_i ahelasse $p_{\lfloor na_i \rfloor}$.
- Sorteerime kõik n lihtahelat.
- Konkateneerime nad üheks lihtahelaks.

Keerukus:

Esimene, teine ja neljas samm töötavad ajaga $\Theta(n)$.

Ühes ahelas on keskmiselt 1 element.

Loeme, et sorteerimine toimub $\Theta(n^2)$-keerukusega meetodiga. Leiame ühe ahela sorteerimise keskmise keerukuse.

Olgu n_i ahela p_i pikkus. Tõenäosus, et mingi a element on ahelas p_i on $1/n$ ja erinevate elementide ahelas p_i olemise tõenäosused üksteisest ei sõltu. (ühtlane jaotus!)

Seega on iga $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$ jaoks tõenäosus, et täpselt $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ ahelasse p_i satuvad $\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k}$.

Need $j_1, \ldots, j_k$ saab valida $\binom{n}{k}$ erineval viisil, s.t.

$$\Pr[n_i = k] = \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^n} \quad .$$

Sorteerimise keskmine keerukus on

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^n} \Theta(k^2) = \Theta\left(\frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 (n-1)^{n-k}\right) \quad .$$

Kuna $k \cdot \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, siis

$$k^2\binom{n}{k} = nk\binom{n-1}{k-1} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} + n\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1} \ .$$

Siin loeme, et kui $m < 0$, siis $\binom{n}{m} = 0$.

$$\frac{1}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2(n-1)^{n-k}=$$

$$\frac{n-1}{n^{n-1}}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}(n-1)^{n-k}+\frac{1}{n^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(n-1)^{n-k}=$$

$$\frac{(n-1)n^{n-2}}{n^{n-1}}+\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=2-\frac{1}{n}<2\ .$$

S.t. ühe ahela sorteerimine käib keskmiselt konstantse ajaga ning n ahela sorteerimine keskmiselt ajaga $\Theta(n)$.

Tõenäosusteooriast mõningaid teadmisi omades oleks see tuletus lihtsam olnud...