Digitaalskeemide simuleerimise algebraliste meetodite analüüs

Ahto Buldas

13. juuli 1993

Esitatud arvutitehnika instituudile
magistrikraadi saamiseks

Annotatsioon

Digitaalskeemide simuleerimisel pole sageli vaja välja arvutada signaalide täpseid kujusid vaid on üksnes tarvis kindlaks teha signaalide teatud omadused. Kõikvõimalikud omaduste komplektid moodustavad algebra. Selline lähenemine võimaldab kokku hoida simuleerimiseks kuluvat aega. Skeeme on võimalik esitada mitmesuguste mudelite abil. Simuleerimisviis sõltub sageli mudelist. Käesolevas töös uuritakse seoseid erinevate simuleerimisviiside vahel erinevates mudelites. Selgub, et paljud küsimused mudelitest on taandatavad universaalalgebra elementaarsetele probleemidele.

Töö juhendaja: prof. Raimund Ubar

Sisukord

1 ALGEBRALINE SIMULEERIMINE

1.1 Sissejuhatus

Olgu meil mingi digitaalskeem, milleks võib olla kasvõi tavaline 2-AND element. Vaadeldav element teisendab kaks sisendsignaali üheks väljundsignaaliks. Täpne väljundsignaali kuju sõltub oluliselt sellest, kuidas on meie 2-AND element realiseeritud. Teades tema sisemist struktuuri, võime 2-AND elementi simuleerida kui analoogskeemi ja saada enam-vähem tõelähedase väljundsignaali kuju kätte. Kui meid aga ei huvita signaalide täpsed kujud, vaid ainult nende teatud omadused, siis on arusaadav, et nii toimides teeme palju ülearust tööd. Kas ei ole kuidagi võimalik simuleerida objekti nii, et arvutataks välja ainult meid huvitavad omadused hoides sellega kokku simuleerimiseks kuluvat aega. Üheks sääraseks meetodiks ongi siinkirjeldatav algebraline simuleerimine.

1.2 Elektroonikast algebrasse

Vaatleme uuesti 2-AND elementi ning paneme tähele, et viimane teisendab kaks signaali üheks signaaliks. Seega võib 2-AND elemendi poolt tehtut vaadelda kui algebralise tehte y sooritamist kõigi signaalide hulgal S. Soovides vaadelda vaid teatud meid huvitavaid omadusi, on vaja defineerida hulgal S ekvivalents ρ nii, et kõikide meid huvitavate signaalide algebra A oleks isomorfne faktoralgebraga S/ρ. Näiteks kui defineerida operaator ψ nii, et

$$(\psi f)(t) = \begin{cases} 1 & \text{kui } f(t) > a \\ 0 & \text{kui } f(t) \leq a \end{cases}$$

siis märkame, et kehtivad valemid:

$$\begin{aligned} \forall f, g (\psi(f \wedge g)(t) &= \inf\{\psi f(t), \psi g(t)\}), \\ \forall f, g (\psi(f \vee g)(t) &= \sup\{\psi f(t), \psi g(t)\}). \end{aligned}$$

Siin kujutavad f ja g endast mingeid signaale. Seega on võimalik kõigi signaalide algebrat S homomorfselt kujutada teiseks algebraks A, mille baashulka kuuluvad vaid sellised signaalid, mis igal ajahetkel t saavad omada väärtust hulgast $\{0, 1\}$ ning milles tehetena esinevad ülem- ja alamtõkke leidmise operatsioonid. Nagu hästi teada, kujutab selline algebra A endast tehete inf ja sup suhtes võret. Kui parameeter t fikseerida, siis võime vastavad operatsioonid üles kirjutada Cayley tabelite abil (Vt. joonis 1).

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Joonis 1: Kaheelemendilise võre Cayley tabelid

Siin on tehtemärgid inf ja sup asendatud vastavalt $\wedge$ ja $\vee$-ga. Parameetri t fikseerimisel saame seega kahe-elemendilise võre, mis on distributiivne, sest kõik võred, milles on vähem kui 5 elementi, on distributiivsed. Algebra A avaldub järelikult distributiivsete võrede lõpmatu otsekorrutisena ja on seega ise distributiivne võre, kuna distributiivsed null- ja ühikelemendiga võrede klass on muutkond ning seega kinnine otsekorrutise suhtes. See fakt tuleneb tuntud Birkhoffi teoreemist. Kasutades Cayley tabeleid, on meil võimalik simuleerida suhteliselt lihtsalt. Lihtne on märgata, et viimased

tabelid esitavadki 2-AND ja 2-OR elementide loogikafunktsioone ja kui siia lisada veel inversioon, siis ongi tegemist tavalise kahe-elemendilise Boole'i algebraga. Sageli aga tekkib vajadus simuleerida mitte signaalide determineeritud omadusi, vaid nende statistilisi omadusi. Üldjuhul ei ole siis eelnevas näites saadud lõplik faktoralgebra enam distributiivne võre ning mõningatel juhtudel pole ta isegi võre. Näiteks kui vaadelda kolme omadust:

- signaali algväärtus hulgast 0,1 (anal. eelmise näitega),
- lõppväärtus,
- impulsi esinemise võimalikkus signaalis.

Kolmas parameeter on loomulikult statistiline ning tänu sellele saame algebralise struktuuri, mis kujutab endast poolvõret mõlema tehte suhtes ning kus kehtib nn. üldistatud modulaarsuse seadus

$$\forall x, y, z((z \rho y) \& (z \sigma y) \rightarrow (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge y),$$

kus $z \rho y \equiv z \wedge y = z$ ja $z \sigma y \equiv z \vee y = y$. Võre korral loomulikult $\rho = \sigma$. Viimatisaadud algebrat hakkame lühidalt nimetama MVS8 , ning edaspidi tuleb sellest rohkem juttu.

1.3 Algebra MVS8

Kui vaadelda kõigi signaalide hulga sellist ekvivalentsi, mille korral loeme ühte klassi kuuluvateks kõiki neid signaale, mille kõik kolm alljärgnevat parameetrit langevad kokku:

- algväärtus hulgast $\{0, 1\}$;
- lõppväärtus;
- impulsi võimalikkus vaadeldavas ajaintervallis.

Seega saadava faktoralgebra järk on 8. Toome ära vastavate baashulga elementide tähised:

- 0 - Staatiline 0 signaal,
- 1 - Staatiline 1 signaal,
- E - Monotoonselt kasvav signaal,
- H - Monotoonselt kahanev signaal,
- o - O + impulsi võimalikkus,
- i - 1 + impulsi võimalikkus,
- e - E + impulsi võimalikkus,
- h - H + impulsi võimalikkus.

Algebraks MVS8 nimetame algebrat baashulgaga

$$A = \{0, 1, E, H, o, i, e, h\},$$

kus tehted on defineeritud Cayley tabelitega joonisel (2).

Arvuti abil on lihtne veenduda, et algebras MVS8 kehtivad järgmised samasused:

$\vee$	0	1	E	H	o	i	e	h
0	0	1	E	H	o	i	e	h
1	1	1	1	1	1	1	1	1
E	E	1	E	i	e	i	e	i
H	H	1	i	H	h	i	i	h
o	o	1	e	h	o	i	e	h
i	i	1	i	i	i	i	i	i
e	e	1	e	i	e	i	e	i
h	h	1	i	h	h	i	i	h

$\wedge$	0	1	E	H	o	i	e	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	E	H	o	i	e	h
E	0	E	E	o	o	e	e	o
H	0	H	o	H	o	h	o	h
o	0	o	o	o	o	o	o	o
i	0	i	e	h	o	i	e	h
e	0	e	e	o	o	e	e	o
h	0	h	o	h	o	h	o	h

Joonis 2: Algebra MVS8 Cayley tabelid

- assotsiatiivsus

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z)\\ (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z)\end{aligned}$$

- kommutatiivsus

$$\begin{aligned}x \wedge y &= y \wedge x\\ x \vee y &= y \vee x\end{aligned}$$

- idempotentsus

$$\begin{aligned}x \wedge x &= x\\ x \vee x &= x\end{aligned}$$

Ei kehti:

- neelamisseadused

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee y &= y\\ (x \vee y) \wedge y &= y,\end{aligned}$$

  sest näit.

$$\begin{aligned}(H \wedge E) \vee E &= e,\\ (H \vee E) \wedge E &= e.\end{aligned}$$

- distributiivsuse seadused

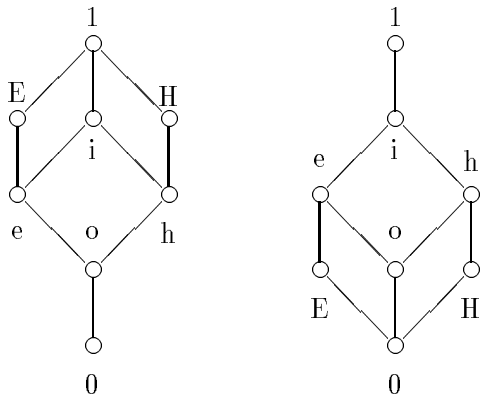
$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee z &= (x \vee z) \wedge (y \vee z)\\ (x \vee y) \wedge z &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z).\end{aligned}$$

Siin ei vaatle me täiesti teadlikult inversiooni, kuna soovime uurida vaid binaarsete tehete omadusi. Inversiooni kui unaarse operatsiooni võib lisaks binaarsetele tehetele ka juurde defineerida tingimusel, et ta rahuldaks DeMorgani ja eituse eitamise samasust. Inversiooni lisamisel aga ei osutu allpool kirjeldatud homomorfismid üldiselt enam algebra $< A; \wedge, \vee, ' >$ homomorfismideks.

Esimesed kolm omadust lubavad defineerida hulgal A kaks osalist järjestust ρ ja σ järgmiselt:

$$\begin{aligned} x \rho y &\equiv x \wedge y = x, \\ x \sigma y &\equiv x \vee y = y. \end{aligned}$$

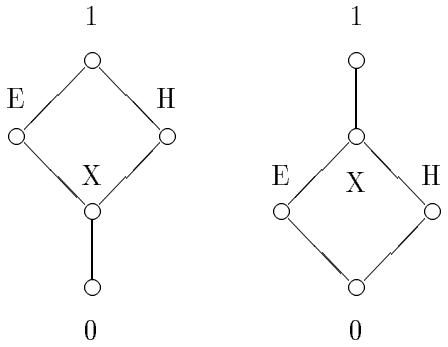
Toome ära ka tekkinud poolvõrede $< A; \rho >$ ja $< A; \sigma >$ Hasse diagrammid.



Joonis 3: Relatsioonidele ρ ja σ vastavad Hasse diagrammid

Nagu juba ära märgitud, jääb vaadeldavas algebras kehtima ka üldistatud modulaarsuse samasus:

$$\forall x, y, z((z \rho y) \& (z \sigma y) \rightarrow (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge y),$$



Joonis 4: Seoste ρ ja σ Hasse diagrammid

Vaatleme nüüd algebra MVS8 ekvivalentsi η, mille ekvivalentsusklassid on

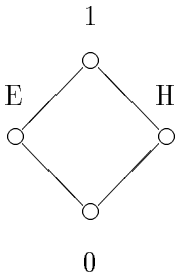
$$\{0\}, \{1\}, \{E\}, \{H\}, \{o, i, e, h\} = X.$$

Kerge on veenduda, et ekvivalents on algebra MVS8 kongruentsiks. See fakt lubab moodustada faktoralgebra $MVS5 = MVS8/\eta$, millele vastavad Hasse diagrammid on järgnevad.

Vaadeldes MVS8 ekvivalentsi η klassidega

$$\{0, o\}, \{1, i\}, \{E, e\}, \{H, h\}$$

saame faktoralgebra $MVS4 = MVS8/\eta$, mis osutub võreks. Selle võre Hasse diagramm on järgmine.

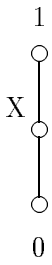


Joonis 5: Võre MVS4 Hasse diagramm

Vaadeldes ekvivalentsi η klassidega

$$\{0\}, \{1\}, \{E, H, i, o, e, h\} = X,$$

saame võre MVS3, ning vaadeldes ekvivalentsi klassidega $\{0\}, \{1, E, H, o, i, e, h\} = 1$, saame võre MVS2.



Joonis 6: Võre MVS3 Hasse diagramm

2 DIGITAALSKEEMIDE MUDELID

Esitatakse lühiülevaade skeemide BDD tüüpi mudelitest, muuhulgas SAG mudelitest, millel on käesolevas töös peamine roll. Formuleeritakse käesoleva töö probleem.

2.1 Binaardiagrammid

Binaardiagrammid ehk binaarsed otsustusdiagrammid (Binary Decision Diagrams) (lühend BDD) kujutavad endast orienteeritud graafi taolisi struktuure, mida kasutatakse Boole'i funktsioonide esitamiseks. Esmakordselt defineeris binaardiagrammid S.B.Akers artiklis [4] ning viimasel ajal on tema ideid edasi arendanud kõige enam R.E.Bryant [3]. Refereerime järgnevalt ülalmainitud autoreid ning toome ära põhilised definitsioonid, mis on vajalikud töö edasise sisu mõistmiseks.

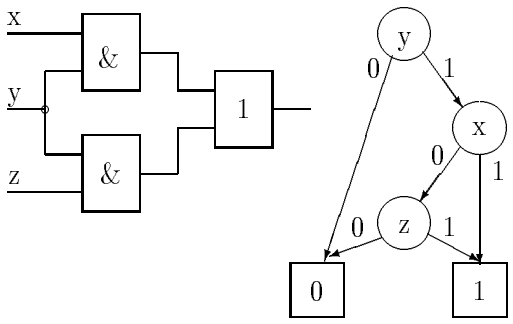
Binaardiagramm (BDD) on suunatud tsükliteta graaf, milles on täpselt kaks nn. terminaalset tippu (tipp, millest ei välju ühtegi kaart), mida tähistatakse vastavalt 1 ja 0. Iga mitte-terminaalne tipp on märgistatud parajasti ühe Boole'i muutujaga v Iga kaar on märgistatud elemendiga hulgast $\{0,1\}$. Igast tipust väljub parajasti üks selline kaar, mis on märgistatud arvuga 1 ning parajasti üks selline kaar, mis on märgistatud arvuga 0 (0-kaared ja 1-kaared). Kui s on tipp, millest väljuv 0-kaar siseneb tippu t, siis öeldakse, et tipp t on tipu s 1-järglaseks. Analoogiliselt defineeritakse mõiste 0-järglane. Iga tipp s, mis on märgistatud muutujaga v esitab mingit Boole'i funktsiooni F_s, mille saab avaldada järgmiselt

$$F_s = (x \wedge F_1) \vee (x' \wedge F_0),$$

kus F_1 ja F_0 on vastavalt tipu s 1-järglase ja 0-järglase Boole'i funktsioonid. Viimast võrdust võib esitada ka nn. if-then-else operaatori $ite(,,)$ abil, mis on defineeritud kui Boole'i funktsioon

$$ite(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (x' \wedge z).$$

Järjestatud binaardiagrammiks (OBDD) nimetatakse binaardiagrammi, milles igas tippude ahelas esinevatele tippudele vastavad boole'i muutujad on kindlal viisil järjestatud. Ütleme, et järjestatud binaardiagramm on taandatud (ROBDD), kui iga tipp esitab erinevat boole'i funktsiooni. Bryant näitas [3], et ROBDD-d on Boole'i funktsioonide kanoonilised esitused. See tähendab, et kui kaks ROBDD-d on isomorfsed, siis vastavad Boole'i funktsioonid on ekvivalentsed. Näiteks joonisel 7 on kujutatud Boole'i funktsioonile $(x \wedge y) \vee (y \wedge z)$ vastavat skeemi ja BDD mudelit.

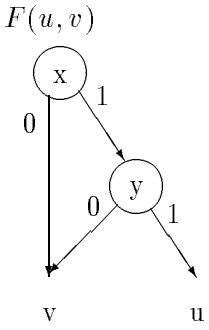


Joonis 7: Skeem ning vastav BDD

2.2 SAG mudelid

Järgnevalt kirjeldame ühte BDD eriliiki, mis tegelikult on kasutusele võetud juba aastal 1976 R.Ubari poolt ja peaks seega olema vanem kui Akersi poolt pakutu. Põhiidee seisneb siin selles, et defineeritakse teatavad algebralised operatsioonid BDD tüüpi graafidega. Järgnevalt kirjeldame lühidalt põhiprintsiipe.

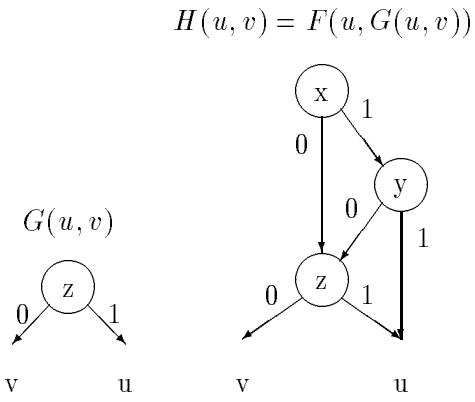
Selleks tuleb sisse tuua nn. graaf-funktsioonid, mis piltlikult kujutavad endast BDD mudeleid ilma terminaalsete tippudeta. Seega jäävad osad kaared nö. õhku rippuma. Graaf-funktsioonide erijuhuks on terminaalsed tipud 0 ja 1 ise, mis kujutavad endast nn. 0-aarseid graaf-funktsioone. Need kaared, mis õhku rippuma jäävad, grupeeritakse. Iga gruppi nimetatakse graaf-funktsiooni argumendiks.



Joonis 8: Näide graaf-funktsioonist F argumentidega u ja v

Näiteks joonisel 8 on esitatud graaf-funktsioon argumentidega u ja v. Graaf-funktsiooni, millel on täpselt kaks argumenti, nimetame binaarseks graaf-funktsiooniks.

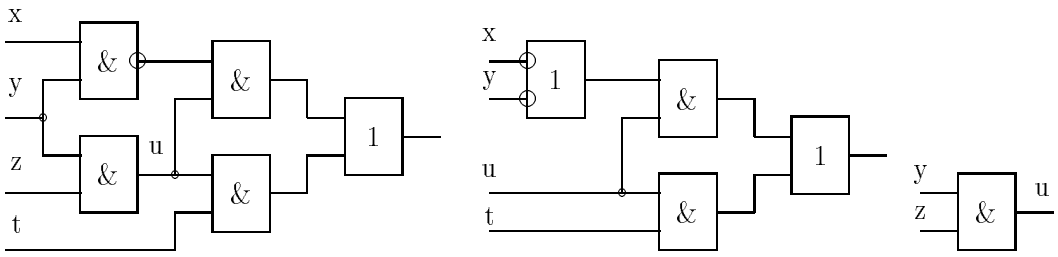
Kahest binaarsest graaf-funktsioonist $F(u,v)$ ja $G(u,v)$ võib saada uue binaarse graaf-funktsiooni $H(u,v)$ nn. superpositsiooni abil. Olgu $F(u,v)$ nagu joonisel 8. Vaatame joonist 9, kus on kujutatud $G(u,v)$ ning $H(u,v)$.



Joonis 9: Graaf-funktsioonide superpositsioon

Igast BDD-st, mida tähistame F saab binaarse graaf-funktsiooni F^*, kui eemaldame BDD-st terminaalsed tipud. Kui meil on binaarne graaf-funktsioon $G(u,v)$, siis temast saab BDD, kui asendame argumendid u ja v vastavalt terminaalsete tippudega 1 ja 0, s.t. moodustame G(1,0).

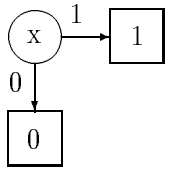
Nagu öeldud, on ROBDD Boole'i funktsioonide kanooniline esitus. Reaalne skeem on aga midagi enamat, kui ainult Boole'i funktsioon. Paljude ülesannete korral on väga oluline ka skeemi struktuur. Näitena vôiks tuua viidete simuleerimise.



Joonis 10: Skeem ning vastavad puukujulised alamskeemid

Järgnevalt kirjeldame, kuidas tehakse skeemist SAG mudel. Kôigepealt märgime, et kui skeem pole puukujuline, s.t. kui skeemis esineb hargnemispunkte, siis jagatakse skeem puukujulisteks alamskeemideks. Kui puukujulise skeemi väljundis vôi nö. keset skeemi on invertor, siis kasutatakse DeMorgani seadust ning teisendatakse skeem kujule, kus kôik invertorid on sisendites (vt. joonis 10).

- Kui tegemist on triviaalse skeemiga, mille sisendiks on x ning väljund on ühendatud otse sisendiga, siis tema SAG koosneb 3-st tipust, nagu on näha jooniselt 11.



Joonis 11: Triviaalse skeemi SAG mudel

- Kui skeem on kahe almskeemi konjunktsioon ning alamskeemidele vastavad SAG mudelid on F ja G, siis skeemi SAG mudeliks on $H(1,0)$, kus

$$H(u,v) = F^*(G^*(u,v),v);$$

- Kui skeem on kahe alamskeemi disjunktsioon ning alamskeemidele vastavad SAG mudelid on F ja G, siis skeemi SAG mudeliks on $H(1,0)$, kus

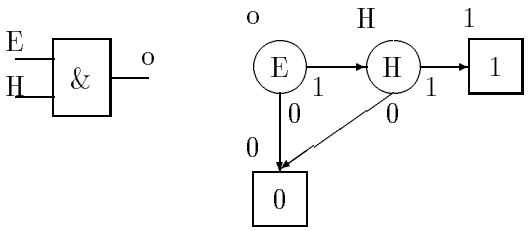
$$H(u,v) = F^*(u,G^*(u,v)).$$

SAG on mudel, mis mingis môttes säilitab skeemi struktuuri.

2.3 Probleemi püstitus

Kôik sai alguse vajadusest simuleerida skeemi kasutades algebrat MVS8, kusjuures eeldati, et skeem on esitatud mingi BDD tüüpi mudeli abil (näiteks SAG). A.Voolaine [5] pakkus simuleerimiseks välja

järgmise rekursiivse algoritmi, kus igale tipule seatakse vastavusse üks algebra MVS8 element kasutades selle tipuga seotud muutuja väärtust ning selle tipu 0- ja 1- järglastes leitud väärtusi. Seega on siin tegemist ternaarse operatsiooniga, mida saab esitada kaheksa ruuttabeli abil, mida autor ise nimetas otsustustabeliteks (decision table). Seega tuleks leida vaid tabelite sobiv sisu. Vaata joonis 12 A.Voolaine eeldas, et selline ternaarne operatsioon leidub. Tõepoolest, kui tegemist on tavalise



Joonis 12: Simuleerimine BDD mudelil.

kaheelemendilise võrega, siis selline ternaarne operatsioon tõepoolest leidub ja avaldub lihtsa valemi abil

$$(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x' \wedge z),$$

kus x all mõeldakse tipuga seotud muutuja väärtust, y on tipu 1-järglasele vastav väärtus ning z on 0-järglasele vastav väärtus. Siit aga ei järeldu, et selline operatsioon peaks leiduma nö. keerulisemate algebrate korral.

Käesolevas töös püstitatakse järgmine probleem: Millised on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et vastav ternaarne operatsioon leiduks, s.t. milline peab olema algebra. Selge, et see sõltub ka reeglitest, mille järgi ehitatakse skeemile BDD mudel.

2.4 Samast probleemist algebra terminites

Selleks, et probleemi korralikult formuleerida, on vaja esmalt selgeks teha, mis on skeem. Algebra seisukohalt on skeem mingi term, s.t. mingi signatuuriga Ω absoluutselt vaba algebra element, kus

$$\Omega = \{\vee, \wedge, ', 1, 0\}$$

on vastava algebra signatuur.

Teiseks oleks tarvis vastata küsimusele: mis on BDD mudel. Vastus on analoogiline. BDD on term teise signatuuriga Σ' absoluutselt vabas algebras, kus

$$\Sigma' = \{(, ,), 1, 0\}.$$

Järgmises peatükis esitatakse probleemi lahenduseks vajalik teooria, mis kasutab viimatimainitud abstraktsioone.

3 ALGEBRALISED ASPEKTID

Esitatakse käesoleva töö teoreetilised alused. Defineeritakse algebrate abstraktsed klassid SA ja SP. Uurides nende seost tuntud algebrate klassidega leitakse, et klass SA ühtib distributiivsete null- ja ühikelemendiga vôrede klassiga. Näidatakse, et klass SA on klassi SP alamklass.

3.1 Sissejuhatus

Algebrate abstraktseid klasse vôib defineerida mitmel viisil. Üheks vôimaluseks on näiteks samasuste hulga etteandmine, mis on kasutusel universaalalgebras. Samasused kujutavad endast nn. termide hulga otseruudu elemente. Termid ise on defineeritud mingi loenduva lôpmatu tähestiku X ja signatuuri Ω abil. Termide hulk ise moodustab algebra nn. termide konkatenatsiooni operatsioonide suhtes. Sellist algebrat nimetatakse absoluutselt vabaks algebraks signatuuriga Ω. mis igale Ω-termile t seab vastavusse selle termi termfunktsiooni $F[t]$. Ütleme, et algebras A kehtib samasus $< u, v >$, kui mistahes morfismi $F{:}T(\Omega, X) \longrightarrow A$ korral kehtib vôrdus

$$F[u] = F[v].$$

Käesolevas töös kasutatakse Ω-algebrate klasside defineerimiseks järgmist printsiipi. Kôigepealt fikseeritakse kaks signatuuri Ω ja Σ, defineeritakse kujutus $\psi{:}T(\Omega, X) \to T(\Sigma, X)$. Seejärel defineeritakse Ω-algebrate abstraktne klass, kuhu kuuluvad parajasti sellised algebrad A, mis täidavad tingimust: *iga morfismi $F{:}T(\Omega, X) \longrightarrow A$ korral leidub morfism G, mis teeb järgmise diagrammi kommutatiivseks:*

$$\begin{array}{ccc} T(\Omega, X) & \stackrel{F}{\longrightarrow} & A \\ \psi \downarrow & & \| \\ T(\Sigma, X) & \stackrel{G}{\longrightarrow} & A \end{array}$$

Järelikult on tekkiv algebrate klass täielikult määratud kujutusega ψ.

Järgnevates peatükkides uuritakse môningate ülalmainitud viisil defineeritud klasside omadusi ja seost muutkondadega. Eestikeelse terminoloogia osas on püütud olla kooskôlas raamatuga [2].

3.2 Klassid SA ja SP

Olgu 0 ja 1 0-aarsed, $\vee$ ja $\wedge$ unaarsed ning $(,,)$ ternaarne operatsioon. Defineerime kaks hulka Σ ja Σ'.

$$\Sigma = \{0, 1, \vee, \wedge\},$$

$$\Sigma' = \{0, 1, (,,)\}.$$

Olgu X mingi fikseeritud tähestik ning $T(\Sigma, X)$ ja $T(\Sigma', X)$ absoluutselt vabad algebrad signatuuridega vastavalt Σ ja Σ'. Defineerime nn. asenduse operaatorid kui kujutused hulgalt $T(\Sigma, X)$ iseendasse. Kui $t, u \in T(\Sigma, X)$, siis $S_t^0 u$ on Σ-term, mis on saadud Σ-termist u niiviisi, et kôik sümboli 0 esinemised on asendatud termiga t. Analoogiliselt defineerime operaatorid S_t^1 ja S_t^x, kus $x \in X$. Viimatinimetatud operaatorite vahel kehtivad seosed:

$$S^0_{S^0_t u} = S^0_t \circ S^0_u,$$

$$S^1_{S^1_t u} = S^1_t \circ S^1_u. \qquad (1)$$

Samad operaatorid vôib defineerida ka hulgal $T(\Sigma', X)$. Eeldame, et hulk X on loenduv ja teataval viisil täielikult järjestatud, s.t. leidub bijektsioon $\alpha : \omega \longrightarrow X$, kus ω on naturaalarvude hulk. Kui $\alpha(i) = x$, siis ütleme, et i on tähe x järjenumber.

Järgnevalt defineerime kujutused φ ja ψ hulgalt $T(\Sigma, X)$ hulka $T(\Sigma', X)$.

Kujutus φ:

- Kui on tegemist 0-aarse operatsiooni vôi tähestiku X elemendiga, siis

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(x) = (x, 1, 0)$$

  iga $x \in X$ korral;

- Kui t on term, milles ei esine tähestiku X elemente, siis nö. "arvutame" termi t kujutise kujutledes, et struktuur $(\{1, 0\}; \vee, \wedge)$ on vôre;

- Kui t on kôrgema astme term ning $x \in X$ on termis t esinev vähima järjenumbriga element, siis

$$\varphi(t) = (x, \varphi(S_1^x), \varphi(S_0^x)).$$

Kujutus ψ:

- Kui on tegemist 0-aarse operatsiooni vôi tähestiku X elemendiga, siis

$$\psi(0) = 0, \psi(1) = 1, \psi(x) = (x, 1, 0)$$

  iga $x \in X$ korral;

- $\psi(t \wedge u) = S^1_{\psi u}\psi t$

- $\psi(t \vee u) = S^0_{\psi u}\psi t$

Olgu meil fikseeritud baashulk A, millel on defineeritud termfunktsioonid. Hakkame edaspidi termi t termfunktsiooni tähistama $F[t]$ sôltumata sellest, kas t on Σ- vôi Σ'-term. See ei pôhjusta segadusi. Kujutuste φ ja ψ abil defineerime kaks abstraktset algebrate klassi.

Definitsioon 3.1 ***SA-algebraks*** *nimetatakse Σ-algebrat A, mille korral leidub sama baashulgaga Σ'-algebra, nii et kujutus φ jätab termfunktsioonid muutumatuks tähestiku X ükskôik millise täieliku järjestuse korral (järjestustüübiga ω loomulikult).*[1]

Definitsioon 3.2 ***SP-algebraks*** *nimetetakse Σ-algebrat A, mille korral leidub sama baashulgaga Σ'-algebra, nii et kujutus ψ jätab termfunktsioonid muutumatuks, kusjuures 0 ja 1 käituvad kui null- ja ühikelement.*

Ülaltoodud definitsioonid ei ole antud samasuste abil, mistôttu ei saa veel öelda, kas klassid SA ja SP on muutkonnad universaalalgebra môttes. Järgnevates punktides uuritakse klasside SA ja SP seost muutkondadega. Tehakse kindlaks môningad samasused, mis peavad kehtima klassides SA ja SP.

[1] Selgub, et nii tugev nôue on ülearune. Nimelt saab induktsiooni abil tôestada, et kui $\varphi(u) = \varphi(v)$ mingi täieliku järjestuse korral, siis kehtib see vôrdus ka suvalise teise täieliku järjestuse korral.

3.3 Distributiivsed vôred ja klass SA

Näidatakse, et klass SA pole midagi muud, kui distributiivsete null- ja ühikelemendiga vôrede muutkond.

Eeldame, et X on järjestatud tavalises môttes (nagu eesti keele tähestik).

Teoreem 3.1 *Iga SA-algebra on distributiivne null- ja ühikelemendiga vôre.*

Tôestus. Näitame, et kehtivad kôik distributiivse vôre samasused. On selge, et 0 ja 1 käituvad kui null- ja ühikelement. Kehtivad järgmised samasused:

- **Assotsiatiivsus**

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee (y \vee z)) &= (x, \varphi(1 \vee (y \vee z)), \varphi(0 \vee (y \vee z))) = (x, 1, \varphi(y \vee z)) = \\ &= (x, \varphi((1 \vee y) \vee z), \varphi((0 \vee y) \vee z)) = \\ &= (x, \varphi(S_1^x((x \vee y) \vee z)), \varphi(S_0^x((x \vee y) \vee z))) = \\ &= \varphi((x \vee y) \vee z).\end{aligned}$$

  Järelikult on vôrdsed ka termide $x \vee (y \vee z)$ ja $(x \vee y) \vee z$ termfunktsioonid, sest eelduse kohaselt jättis kujutus φ termfunktsioonid muutumatuks, mistôttu operatsiooni $\vee$ korral kehtib assotsiatiivsuse samasus. Analoogiliselt tôestatakse operatsiooni $\wedge$ assotsiatiivsus.

- **Kommutatiivsus**

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee y) &= (x, \varphi(1 \vee y), \varphi(0 \vee y)) = (x, \varphi(y \vee 1), \varphi(y \vee 0)) = \\ &= (x, \varphi(S_1^x(y \vee x)), \varphi(S_0^x(y \vee x))) = \\ &= \varphi(y \vee x).\end{aligned}$$

  Analoogiliselt tôestatakse operatsiooni $\wedge$ kommutatiivsus.

- **Idempotentsus**

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee x) &= (x, \varphi(1 \vee 1), \varphi(0 \vee 0)) = \\ &= (x, 1, 0) = \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

  Analoogiliselt tôestatakse kommutatiivsus operatsiooni $\wedge$ korral.

- **Neelamine**

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee (x \wedge y)) &= (x, \varphi(1 \vee (1 \wedge y)), \varphi(0 \vee (0 \wedge y))) = \\ &= (x, 1, 0) = \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x \wedge (x \vee y)) &= (x, \varphi(1 \wedge (1 \vee y)), \varphi(0 \wedge (0 \vee y))) = \\ &= (x, 1, 0) = \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

- **Distributiivsus**

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee (y \wedge z)) &= (x, \varphi(1 \vee (y \wedge z)), \varphi(0 \vee (y \wedge z))) = \\ &= (x, 1, \varphi(y \vee z)) = (x, \varphi((1 \vee y) \wedge (1 \vee z)), \varphi((0 \vee y) \wedge (0 \vee z))) = \\ &= (x, \varphi(S_1^x((x \vee y) \wedge (x \vee z))), \varphi(S_0^x((x \vee y) \wedge (x \vee z)))) = \\ &= \varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)).\end{aligned}$$

Järelikult on tôepoolest tegemist distributiivse null- ja ühikelemendiga vôrega. *Q.E.D.*

Sama tehnikaga saab lihtsalt näidata, et kehtivad seosed

$$\begin{aligned}\varphi((x \wedge y) \vee z) &= (x, \varphi(y \vee z), \varphi(z)) \\ \varphi((x \vee z) \wedge y) &= (x, \varphi(y), \varphi(z \wedge y)).\end{aligned} \tag{2}$$

Olgu meil suvaline SA-algebra, mis on teoreemi 3.1 pôhjal ühtlasi ka distributiivne vôre. Vôre on alati seotud mingi osalise järjestusega, mida saab defineerida järgmiselt:

$$z \leq y \Longleftrightarrow y \vee z = y,$$

mis on samaväärne definitsiooniga:

$$z \leq y \Longleftrightarrow z \wedge y = z.$$

Siit aga järeldame, et suvalise SA-algebra korral kehtib seos

$$\forall x, y, z(z \leq y \longrightarrow (x, y, z) = (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge y), \tag{3}$$

mis ütleb väga palju vastava Σ'-algebra ternaarse operatsiooni kohta. Kuna me teame, et igas vôres kehtib monotoonsuse omadus, s.t.

$$F[S_0^x t] \leq F[S_1^x t],$$

iga $x \in X$ ning suvalise Σ-termi t korral, siis järelikult pole ternaarse operatsiooni tulemused muudel juhtudel üldse olulised. See fakt on eriti oluline järgmise teoreemi tôestamisel.

Teoreem 3.2 *Iga distributiivne null- ja ühikelemendiga vôre on ühtlasi ka SA-algebra.*

Tôestus. Defineerime ternaarse operatsiooni järgmiselt:

$$(x, y, z) = \begin{cases} (x \wedge y) \vee z & \text{kui } z \leq y \\ 0 & \text{muudel juhtudel} \end{cases}$$

Tôestame, et kujutus φ jätab termfunktsioonid muutumatuks. Seame nüüd igale Σ-termile t vastavusse naturaalarvu $\lambda(t)$, mida nimetame kokkuleppeliselt termi t suuruseks. Vôime ka öelda, et defineerime kujutuse $\lambda : T(\Sigma, X) \longrightarrow \omega$. $\lambda(t)$ tähistagu termi t pikkuse ja aarsuse summat. Aarsuse all môeldakse termis t esinevate erinevate tähtede (hulga X elementide) arvu. Tôestame teoreemi induktsiooni abil termi suuruse järgi.

- Kui $x \in X$, siis

$$\begin{aligned}F[\varphi x] &= F[(x, 1, 0)] = (F[x], 1, 0) = (F[x] \wedge 1) \vee 0 = \\ &= F[x].\end{aligned}$$

- Olgu t suvaline Σ-term. Oletame, et kujutus φ jätab muutumatuks kôikide termist t väiksemate termide termfunktsioonid. Olgu $t = u \vee v$, kus u ja v on loomulikult termist t väiksemad, mistôttu $F[\varphi u] = F[u]$ ja $F[\varphi v] = F[v]$. Lisaks paneme tähele, et ka termid $S_1^x u$, $S_0^x u$, $S_1^x v$ ja $S_0^x v$ on väiksemad kui t. Kuna operaatorid S_0^x ja S_1^x säilitavad pikkuse ja vähendavad aarsust, siis ka termid $S_1^x t$ ja $S_0^x t$ on termist t väiksemad. Näitame, et φ jätab muutumatuks ka termi t termfunktsiooni.

$$\begin{aligned}
F[t] &= F[u] \vee F[v] = F[\varphi u] \vee F[\varphi v] = \\
&= F[(x, \varphi(S_1^x u), \varphi(S_0^x u))] \vee F[(x, \varphi(S_1^x v), \varphi(S_0^x v))] = \\
&= (F[x], F[\varphi(S_1^x u)], F[\varphi(S_0^x u)]) \vee (F[x], F[\varphi(S_1^x v)], F[\varphi(S_0^x v)]) = \\
&= (F[x], F[S_1^x u], F[S_0^x u]) \vee (F[x], F[S_1^x v], F[S_0^x v]) = \\
&= (F[x] \wedge F[S_1^x u]) \vee F[S_0^x u] \vee (F[x] \wedge F[S_1^x v]) \vee F[S_0^x v] = \\
&= (F[x] \wedge (F[S_1^x u] \vee F[S_1^x v])) \vee (F[S_0^x u] \vee F[S_0^x v]) = \\
&= (F[x] \wedge (F[S_1^x (u \vee v)])) \vee (F[S_0^x (u \vee v)]) = \\
&= (F[x], F[S_1^x (u \vee v)], F[S_0^x (u \vee v)]) = \\
&= (F[x], F[S_1^x t], F[S_0^x t]) = \\
&= (F[x], F[\varphi(S_1^x t)], F[\varphi(S_0^x t)]) = \\
&= F[(x, \varphi(S_1^x t), \varphi(S_0^x t)] = \\
&= F[\varphi t].
\end{aligned}$$

  Järelikult ka termi t termfunktsioon jäetakse muutumatuks. Analoogiliselt tôestatakse see fakt juhul kui $t = u \wedge v$, kuid siis kasutame seose 3 teist poolt, s.t. $(x, y, z) = (x \vee z) \wedge y$.

Induktsiooni pôhjal järeldame nüüd, et funktsioon φ jätab muutumatuks kôikide Σ-termide termfunktsioonid, mistôttu tegemist on SA-algebraga. *Q.E.D.*

Teoreemidest 3.1 ja 3.2 tulenevalt ühtib klass SA distributiivsete null- ja ühikelemendiga vôrede muutkonnaga.

Lôpetuseks veel märkus, et kui A on SA-algebra, siis kehtib vastavas Σ'-algebras nn. neelamisseadus

$$(x, y, y) = y, \tag{4}$$

ning Σ'-algebra saab nii valida, et kehtiksid nn. projektsiooniseadused:

$$\begin{aligned}
(1, x, y) &= x, \\
(0, x, y) &= y.
\end{aligned} \tag{5}$$

3.4 Lähemalt klassist SP

Uuritakse klassis SP kehtivaid samasusi ning samasustevahelisi seoseid. Tehakse kindlaks, et kôik klassi SP kuuluvad vôred on distributiivsed. Näidatakse, et kôik SP-algebrad, kus kehtivad idempotentsuse ja kommutatiivsuse seadused, on distributiivsed null- ja ühikelemendiga vôred.

Teoreem 3.3 *Kôik SP-algebrad on assotsiatiivsed môlema tehte suhtes.*

Tôestus. Kasutame kujutuse ψ definitsiooni ning seoseid 1. Lisaks sellele tuleneb SP-algebra definitsioonist, et $F \circ \psi = F$.

$$\begin{aligned} F[(x \vee y) \vee z] &= F[\psi((x \vee y) \vee z)] = F[S^0_{\psi z}\psi(x \vee y)] = \\ &= F[S^0_{\psi z}S^0_{\psi y}\psi x] = F[S^0_{S^0_{\psi z}\psi y}\psi x] = \\ &= F[S^0_{\psi(y \vee z)}\psi x] = F[\psi(x \vee (y \vee z))] = \\ &= F[x \vee (y \vee z)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[(x \wedge y) \wedge z] &= F[\psi((x \wedge y) \wedge z)] = F[S^1_{\psi z}\psi(x \wedge y)] = \\ &= F[S^1_{\psi z}S^1_{\psi y}\psi x] = F[S^1_{S^1_{\psi z}\psi y}\psi x] = \\ &= F[S^1_{\psi(y \wedge z)}\psi x] = F[\psi(x \wedge (y \wedge z))] = \\ &= F[x \wedge (y \wedge z)]. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Näitame, et SP-algebras kehtivad seostele 2 analoogilised seosed kujutuse ψ korral, s.t.

$$\begin{aligned} \psi((x \wedge y) \vee z) &= (x, \psi(y \vee z), \psi(z)). \\ \psi((x \vee y) \wedge z) &= (x, \psi(z), \psi(y \wedge z)) \end{aligned} \tag{6}$$

Tôepoolest.

$$\begin{aligned} \psi((x \wedge y) \vee z) &= (S^0_{\psi z}\psi(x \wedge y)) = S^0_{\psi z}S^1_{\psi y}\psi x = \\ &= S^0_{\psi z}S^1_{\psi y}(x, 1, 0) = S^0_{\psi z}(x, \psi y, 0) = \\ &= (x, S^0_{\psi z}\psi y, \psi z) = \\ &= (x, \psi(y \vee z), \psi(z)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi((x \vee y) \wedge z) &= (S^1_{\psi z}\psi(x \vee y)) = S^1_{\psi z}S^0_{\psi y}\psi x = \\ &= S^1_{\psi z}S^0_{\psi y}(x, 1, 0) = S^1_{\psi z}(x, 1, \psi y) = \\ &= (x, \psi z, S^1_{\psi z}\psi y) = \\ &= (x, \psi(z), \psi(y \wedge z)). \end{aligned}$$

Teoreem 3.4 *Kui SP-algebras kehtivad idempotentsuse seadused, siis kehtivad ka neelamisseadused.*

$$(x \vee y) \wedge y = y \tag{7}$$

$$(x \wedge y) \vee y = y. \tag{8}$$

Tôestus. Kasutame seoseid 6 ja fakti, et 0 ja 1 käituvad kui null- ja ühikelement. Näitame, et vastavate termide termfunktsioonid langevad kokku.

$$\begin{aligned}
F[(x \vee y) \wedge y] &= F[\psi((x \vee y) \wedge y)] = F[(x, \psi(y), \psi(y \wedge y))] = \\
&= (F[x], F[\psi(y)], F[\psi(y \wedge y)]) = (F[x], F[\psi(y)], F[y \wedge y]) = \\
&= (F[x], F[\psi(y)], F[y]) = (F[x], F[\psi(y)], F[1 \wedge y]) = \\
&= (F[x], F[\psi(y)], F[\psi(1 \wedge y)]) = F[(x, \psi(y), \psi(1 \wedge y))] = \\
&= F[\psi(x \vee 1) \wedge y] = F[(x \vee 1) \wedge y] = \\
&= F[x \vee 1] \wedge F[y] = F[1] \wedge F[y] = \\
&= F[1 \wedge y] = \\
&= F[y].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F[(x \wedge y) \vee y] &= F[\psi((x \wedge y) \vee y)] = F[(x, \psi(y \vee y), \psi(y))] = \\
&= (F[x], F[\psi(y \vee y)], F[\psi(y)]) = (F[x], F[y \vee y], F[\psi(y)]) = \\
&= (F[x], F[y], F[\psi(y)]) = (F[x], F[0 \vee y], F[\psi(y)]) = \\
&= (F[x], F[\psi(0 \vee y)], F[\psi(y)]) = F[(x, \psi(0 \vee y), \psi(y))] = \\
&= F[\psi(x \wedge 0) \vee y] = F[(x \wedge 0) \vee y] = \\
&= F[x \wedge 0] \vee F[y] = F[0] \vee F[y] = \\
&= F[0 \vee y] = \\
&= F[y].
\end{aligned}$$

Järelikult kehtivad neelamisseadused tôepoolest. *Q.E.D.*

Pange tähele, et teoreemist 3.4 ei järeldu veel sugugi, et kôik idempotentsed SP-algebrad on vôred, kuna kommutatiivsus ei pruugi kehtida. Samuti ei järeldu kusagilt, et ka nn. teistpidised neelamisseadused kehtiksid. Selgub, et kui eeldada lisaks idempotentsusele ka môlema tehte kommutatiivsust, siis tekkiv vôre peab ilmtingimata olema distributiivne nagu selgub teoreemist 3.5.

Teoreem 3.5 *Iga SP-algebra, milles kehtivad idempotentsuse ja kommutatiivsuse samasused môlema binaarse operatsiooni korral, on distributiivne vôre.*

Tôestus. Piisav on näidata, et üks distributiivsuse seadus kehtib. Kasutame seoseid 6 ja teoreemi 3.4.

$$\begin{aligned}
F[(x \vee y) \wedge z] &= F[\psi(x \vee y) \wedge z] = F[(x, \psi(z), \psi(y \wedge z))] = \\
&= (F[x], F[\psi(z)], F[\psi(y \wedge z)]) = (F[x], F[z], F[\psi(y \wedge z)]) = \\
&= (F[x], F[(y \wedge z) \vee z], F[\psi(y \wedge z)]) = (F[x], F[z \vee (y \wedge z)], F[\psi(y \wedge z)]) = \\
&= (F[x], F[\psi(z \vee (y \wedge z))], F[\psi(y \wedge z)]) = F[(x, \psi(z \vee (y \wedge z)), \psi(y \wedge z))] = \\
&= F[\psi((x \wedge z) \vee (y \wedge z))] = \\
&= F[(x \wedge z) \vee (y \wedge z)].
\end{aligned}$$

Järelikult on tôepoolest tegu distributiivse vôrega. *Q.E.D.*

Siit vôib teha järelduse, et kôik klassi SP kuuluvad vôred on distributiivsed.

3.5 Klass SA kui klassi SP alamklass

Näidatakse, et distributiivsete null- ja ühikelemendiga vôrede muutkond sisaldub täielikult klassis SP.

Kasutame edaspidi Σ-termide tähistamiseks väikesi ladina tähti ning Σ'-termide tähistamisel suuri ladina tähti.

Definitsioon 3.3 *Ütleme, et Σ'-term A on normaalkujul, kui ternaarse operatsiooni sümboli esimestes positsioonides esinevad vaid tähestiku X elemendid.*

Näiteks Σ'-termid $(x,1,0)$ ja $(x,(y,1,0),0)$ on normaalkujul, termid $(x,((y,1,0),1,0),0)$ ja $(0,1,x)$ aga mitte.

Tähistame kôikide normaalkujuliste Σ'-termide hulka $N(\Sigma',X)$. Selge, et $N(\Sigma',X) \subseteq T(\Sigma',X)$.

Defineerime nüüd kujutuse

$$* : T(\Sigma',X) \longrightarrow T(\Sigma',X)$$

järgneval induktiivsel (rekursiivsel) viisil.

- $0^* = 0, 1^* = 1, x^* = x, \forall x \in X$;
- $(0,A,B)^* = B^*, (1,A,B)^* = A^*$;
- $(x,A,B)^* = (x,A^*,B^*), \forall x \in X$;
- $((A,B,C),D,E)^* = (A,(B,D,E),(C,D,E))^*, \forall A \notin X \cup \{0,1\}$;

Järgnevas näitame, et kujutus $*$ nö. normaliseerib termi $A \in T(\Sigma',X)$ seades talle vastavusse normaalkujulise Σ'-termi A^*.

Teoreem 3.6 *Kujutus $*$ normaliseerib suvalise Σ'-termi A.*

Tôestus. Seame igale Σ'-termile A vastavusse naturaalarvu $w(A)$, mis tähendagu kôikide selliste termi A alamtermide pikkuste summat, mis ei ole hulga X elemendid ning, mis esinevad termis A ternaarse operatsiooni sümbolite esimestes positsioonides.

Näiteks $w((1,0,1)) = 1$, sest termi 1 pikkuseks on 1; $w(((x,1,0),1,0)) = 4$, sest termi $(x,1,0)$ pikkuseks on 4, kuna loeme ternaarset operatsiooni tähistavat sümbolit $(,,)$ üheks sümboliks. Analoogiliselt $w(((1,0,x),y,z)) = 5$, sest termi $(1,0,x)$ pikkuseks on 4 ja termi 1 pikkuseks on 1 ning $4+1=5$.

Selge, et suvaline Σ'-term A on normaalkujul parajasti siis, kui $w(A) = 0$. Teoreemi tôestamiseks näitame, et kehtib seos

$$w(A^*) < w(A), \forall A \in T(\Sigma',X) \backslash N(\Sigma',X), \tag{9}$$

millest piisab, sest $A^{**} = A^*, \forall A \in T(\Sigma',X)$. Näitame, et kehtib lause

$$w((A,(B,D,E),(C,D,E))) < w(((A,B,C),D,E)).$$

Tähistagu $l(A)$ termi A pikkust.

$$\begin{aligned} w((A,(B,D,E),(C,D,E))) &\leq w(((A,B,C),D,E)) - l((A,B,C)) + l(A) + l(B) + l(C) = \\ &= w(((A,B,C),D,E)) - 1 < \\ &< w(((A,B,C),D,E)). \end{aligned}$$

Järelikult $\forall A \in T(\Sigma',X)(w(A^*) = 0)$, millest järeldub, et term A^* on normaalkujul. *Q.E.D.*

Olgu $\mathcal{A}$ mingi SA-algebra ning $\mathcal{B}$ talle vastav Σ'-algebra.

Definitsioon 3.4 *Σ'-termi A nimetatakse monotoonseks termiks algebras $\mathcal{B}$, kui termi A suvalise alamtermi $B = (C, D, E)$ korral kehtib seos*

$$F[E] \leq F[D],$$

kus $\leq$ on vôre järejestus.

Definitsioon 3.5 *Topeltasenduseks nimetatakse funktsiooni $S_{M,N} : T(\Sigma', X) \longrightarrow T(\Sigma', X)$, kus M ja N on Σ'-termid ja iga Σ'-termi A korral on $S_{M,N}A$ Σ'-term, kus ühik- ja nullelemendi sümbolid on asendatud vastavalt termidega M ja N.*

Definitsioon 3.6 *Topeltasendust $S_{M,N}$ nimetatakse monotoonseks topeltasenduseks, kui kehtib lause $F[N] \leq F[M]$, kus $\leq$ on vôre järjestus ning M ja N on monotoonsed termid.*

Teoreem 3.7 *Kui $S_{M,N}$ on monotoonne topeltasendus, siis suvalise Σ'-termi $A \in Im\psi$ korral:*

- *term $S_{M,N}A$ on monotoonne;*
- *$F[N] \leq F[S_{M,N}A] \leq F[M]$.*

Tôestus. Kasutame induktsiooni termi A pikkuse järgi. Kui $A = (x, 1, 0)$ ja $x \in X$, siis

$$S_{M,N}A = (x, M, N).$$

Term (x, M, N) on monotoonne, sest $F[N] \leq F[M]$. Kasutame nüüd fakti, et tegemist on SA-algebraga.

$$\begin{aligned} F[S_{M,N}A] &= F[(x, M, N)] = (F[x], F[M], F[N]) = \\ &= (F[x] \vee F[N]) \wedge F[M] \leq \\ &\leq F[M]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[S_{M,N}A] &= F[(x, M, N)] = (F[x], F[M], F[N]) = \\ &= (F[x] \wedge F[M]) \vee F[N] \geq \\ &\geq F[N]. \end{aligned}$$

Järelikult teoreemi väide kehtib, kui $A = (x, 1, 0)$ suvalise $x \in X$ korral. Olgu nüüd $A = \psi u$, kus u on mingi Σ-term. Oletame, et teoreemi väide kehtib kôikide termist A lühemate $Im\psi$ elementide korral. Näitame, et väide kehtib ka termi A korral. On pôhjust eristada kahte juhtumit:

- $u = v \vee w$, kus u ja v on termist u lühemad, mistôttu termid ψv ja ψw on termist ψu lühemad ja seega nende jaoks teoreemi väide kehtib. Kasutades kujutuse ψ definitsiooni saame, et

$$\begin{aligned} S_{M,N}\psi u &= S_{M,N}S^1_{\psi w}\psi v = \\ &= S_{M,S_{M,N}\psi w}\psi v. \end{aligned}$$

  Kuna termi ψw korral väide kehtis, siis vôime öelda, et term $S_{M,N}\psi w$ on monotoonne ning kehtib lause

$$F[N] \leq F[S_{M,N}\psi w] \leq F[M].$$

Järelikult operaator $S_{M,S_{M,N}\psi w}$ on monotoonne topeltasendus, mistõttu $S_{M,S_{M,N}\psi w}\psi v$ on monotoonne term, sest term ψv on lühem kui ψu, ning kehtivad võrratused

$$F[S_{M,N}\psi w] \leq F[S_{M,S_{M,N}\psi w}\psi v] \leq F[M].$$

Järelikult on $S_{M,N}\psi u$ monotoonne term ja

$$F[N] \leq F[S_{M,N}\psi u] \leq F[M].$$

- $u = v \wedge w$. Siis analoogiliselt

$$\begin{aligned} S_{M,N}\psi u &= S_{M,N}S^0_{\psi w}\psi v = \\ &= S_{S_{M,N}\psi w,N}\psi v. \end{aligned}$$

Kuna term ψw on lühem kui ψu, siis tema puhul teoreemi väide kehtib, mistõttu $S_{M,N}\psi w$ on monotoonne ja kehtib lause

$$F[N] \leq F[S_{M,N}\psi w] \leq F[M],$$

millest järeldub, et $S_{S_{M,N}\psi w,N}$ on monotoonne topeltasendus. Kuna term ψv on lühem termist ψu, siis järeldame sellest, et term $S_{S_{M,N}\psi w,N}\psi v$ on monotoonne ning kehtivad võrratused

$$F[N] \leq F[S_{S_{M,N}\psi w,N}\psi v] \leq F[S_{M,N}\psi w].$$

Järelikult on term $S_{M,N}\psi u$ monotoonne ja kehtivad võrratused

$$F[N] \leq F[S_{M,N}\psi u] \leq F[M].$$

Jõusdime järeldusele, et väide kehtib ka termi A korral, millest induktsiooni põhjal saame, et ta kehtib iga termi $A \in Im\psi$ korral. *Q.E.D.*

Teoreemist 3.7 järeldub nüüd, et kõik $Im\psi$ elemendid on monotoonsed normaalkujulised termid, sest asendusoperaatorite vahel kehtivad seosed

$$\begin{aligned} S^1_M &= S_{M,0}, \\ S^0_N &= S_{1,N}. \end{aligned}$$

Seega operaatorid S^1_M ja S^0_N on monotoonse topeltasenduse erijuhud. Kasutades kujutuse ψ definitsiooni saamegi järeldada, et hulk $Im\psi$ koosneb monotoonsetest termidest.

Teoreem 3.8 *Kui $z \leq y$ ja $b \leq a$, siis kehtib seos*

$$((x,y,z),a,b) = (x,(y,a,b),(z,a,b)). \tag{10}$$

Tõestus. Kasutame seost 3.

$$\begin{aligned} ((x,y,z),a,b) &= ((x \wedge y) \vee z) \wedge a \vee b = (x \wedge y \wedge a) \vee (z \wedge a) \vee (b \vee (x \wedge b)) = \\ &= (x \wedge y \wedge a) \vee (x \wedge b) \vee ((z \wedge a) \vee b) = (x \wedge ((y \wedge a) \vee b)) \vee ((z \wedge a) \vee b) = \\ &= (x,(y,a,b),(z,a,b)). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teoreem 3.9 *Kui A ja B on monotoonsed normaalkujulised Σ'-termid, siis kehtivad seosed*

$$\begin{aligned} F[A] \wedge F[B] &= F[S^1_B A], \\ F[A] \vee F[B] &= F[S^0_B A]. \end{aligned}$$

Tôestus. Kasutame induktsiooni termi A pikkuse järgi.

- Kui $A = (x, 1, 0)$, kus $x \in X$, siis teoreemi väide kehtib suvalise Σ'-termi B korral, sest

$$\begin{aligned} F[(x,1,0)] \wedge F[B] &= F[\varphi x] \wedge F[B] = F[x] \wedge F[B] = \\ &= (F[x] \wedge F[B]) \vee 0 = (F[x], F[B], 0) = F[(x, B, 0)] = \\ &= F[S^1_B(x, 1, 0)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[(x,1,0)] \vee F[B] &= F[\varphi x] \vee F[B] = F[x] \vee F[B] = \\ &= (F[x] \vee F[B]) \wedge 1 = (F[x], 1, F[B]) = F[(x, 1, B)] = \\ &= F[S^0_B(x, 1, 0)]. \end{aligned}$$

- Eeldame, et A on mingi monotoonne normaalkujuline Σ'-term, kusjuures teoreemi väide kehtib kôikide termist A lühemate monotoonsete normaalkujuliste termide korral. Vôime eeldada, et $A = (x, A_1, A_0)$, kus $F[A_0] \leq F[A_1]$ ja A_1 ning A_0 on ise ka normaalkujulised monotoonsed termid, mis on lühemad termist A.

$$\begin{aligned} F[A] \wedge F[B] &= (F[A] \wedge F[B]) \vee 0 = (F[A], F[B], 0) = \\ &= (F[(x, A_1, A_0)], F[B], 0) = ((F[x], F[A_1], F[A_0]), F[B], 0) = \\ &= (F[x], (F[A_1], F[B], 0), (F[A_0], F[B], 0)) = \\ &= (F[x], F[A_1] \wedge F[B], F[A_0] \wedge F[B]) = \\ &= (F[x], F[S^1_B A_1], F[S^1_B A_0]) = \\ &= F[(x, S^1_B A_1), S^1_B A_0)] = \\ &= F[(S^1_B x, S^1_B A_1), S^1_B A_0] = \\ &= F[S^1_B(x, A_1, A_0)] = \\ &= F[S^1_B A]. \end{aligned}$$

  Analoogiliselt tôestatakse induktsioonisamm tehte $\vee$ korral.

Järelikult kehtib teoreemi väide kôikide monotoonsete normaalkujuliste Σ'-termide korral. *Q.E.D.*

Nüüd on juba kerge tôestada selle peatüki pôhiteoreemi.

Teoreem 3.10 *Iga SA-algebra on SP-algebra.*

Tôestus. Näitame, et kujutus ψ jätab termfunktsioonid muutumatuks. Kasutame induktsiooni Σ-termi pikkuse järgi.

- Kui t on kas 1,0 vôi x, kus $x \in X$, siis $F[\psi t] = F[t]$.

- Olgu t Σ-term, nii et kujutus ψ jätab muutumatuks kôikide termist t lühemate termide termfunktsioonid. Olgu $t = u \vee v$, kus u ja v on lühemad kui t.

$$\begin{aligned} F[t] &= F[u \vee v] = F[u] \vee F[v] = \\ &= F[\psi u] \vee F[\psi v] = \\ &= F[S^0_{\psi v} \psi u] = \\ &= F[\psi t], \end{aligned}$$

  sest kasutades fakti, et $Im\psi$ koosneb normaalkujulistest monotoonsetest termidest, saame rakendada teoreemi 3.9. Analoogiliselt tôestatakse see juhul, kui $t = u \wedge v$.

Järelikult jätab kujutus ψ tôepoolest termfunktsioonid muutumatuks, millest tulenevalt on tegemist SP-algebraga. *Q.E.D.*

Järelikult sisaldub kogu distributiivsete null- ja ühikelemendiga vôrede muutkond klassis SP.

3.6 Seos Boole'i algebratega

Teatavatel juhtudel pakub huvi järgmine probleem: millal on vôimalik tüübile Σ lisada unaarne operatsioon $'$, mille korral kehtiksid seosed $0' = 1$ ja $1' = 0$, ning et leiduks vastav Σ'-algebra, nii et kujutus φ jätaks termfunktsioonid muutumatuks. Kujutuse φ definitsiooni on muidugi lisatud "arvutusreeglid" $0' = 1$ ja $1' = 0$.

Teoreem 3.11 *Iga algebra A signatuuriga $\Omega = \Sigma \cup \{'\}$, milles kehtivad samasused $0' = 1$ ja $1' = 0$ ning mille korral leidub Σ'-algebra B, nii et kujutus φ jätab termfunktsioonid muutumatuks, on Boole'i algebra.*

Tôestus. Vaatleme Ω-termi $t = (x \wedge y) \vee (x' \wedge z)$. Rakendades kujutust φ saame, et

$$\begin{aligned} \varphi t &= (x, \varphi(y \vee (1' \wedge z)), \varphi(0' \wedge z)) = \\ &= (x, \varphi y, \varphi z), \end{aligned}$$

millest järeldub, et kehtib samasus

$$(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x' \wedge z).$$

- Kehtib eituse eitamise seadus.

$$\begin{aligned} F[x''] &= F[(x, 1'', 0'')] = F[(x, 1, 0)] = F[\varphi x] = \\ &= F[x]. \end{aligned}$$

- Kehtib välistatud kolmanda seadus.

$$\begin{aligned} F[x \vee x'] &= F[\varphi(x \vee x')] = F[(x, 1, 1)] = \\ &= (F[x], 1, 1) = (F[x] \wedge 1) \vee 1 = \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Kehtivad DeMorgani seadused.

$$\begin{aligned} F[(x' \vee y')'] &= F[(x,(0 \vee y')',(1 \vee y')')] = F[(x,y'',1')] = \\ &= F[(x,y,0)] = (F[x],F[y],0) = \\ &= F[x] \wedge F[y] = \\ &= F[x \wedge y]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[(x' \wedge y')'] &= F[(x(0 \wedge y')',(1 \wedge y')')] = F[(x,0',y'')] = \\ &= F[(x,1,y)] = (F[x],1,F[y]) = \\ &= F[x] \vee F[y] = \\ &= F[x \vee y]. \end{aligned}$$

Järelikult on tôesti tegemist Boole'i algebraga. *Q.E.D.*

3.7 Môned seosed

Olgu meil Σ'-algebra $\mathcal{B}$ baashulgaga A, milles kehtivad järgmised samasused:

- Superpositsiooni samasus

$$((x,y,z),a,b) = (x,(y,a,b),(z,a,b))$$

- Projektsioonisamasused

$$\begin{aligned} (1,a,b) &= a, \\ (0,a,b) &= b; \end{aligned}$$

- Samasus

$$(x,1,0) = x.$$

Selliste omadustega algebra saame näiteks, kui vaatleme pôhihulgana hulka $MAP(A \times A, A)$, mis koosneb kôikidest binaarsetest operatsioonidest hulgal A. Olgu $a(x,y)$, $b(x,y)$ ja $c(x,y)$ binaarsed operatsioonid hulgal A. Ternaarse operatsiooni defineerime järgmiselt:

$$(a,b,c)(x,y) = a(b(x,y),c(x,y)).$$

Nullelemendiks ja ühikelemendiks on vaadeldavas algebras nn. projektsiooni operatsioonid p_0 ja p_1, mis defineeritakse järgmiselt:

$$\begin{aligned} p_0(x,y) &= y; \\ p_1(x,y) &= x. \end{aligned}$$

Vaadeldud algebrat kasutas Trevor Evans artiklis [1] kvaasirühmade uurimisel.

Defineerime järgnevalt kaks binaarset operatsiooni olemasoleva ternaarse operatsiooni kaudu.

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (x,y,0), \\ x \vee y &= (x,1,y). \end{aligned}$$

Näitame, et sel viisil saadud Σ'-algebra kuulub klassi SP.

Teoreem 3.12 *Kõigi normaalkujuliste Σ'-termide A ja B korral kehtivad seosed*

$$\begin{aligned} F[A] \vee F[B] &= F[S^0_B A], \\ F[A] \wedge F[B] &= F[S^1_B A]. \end{aligned}$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni termi A pikkuse järgi.

- Teoreemi väide kehtib, kui $A = (x, 1, 0)$, sest

$$\begin{aligned} F[A] \vee F[B] &= F[(x,1,0)] \vee F[B] = \\ &= (F[(x,1,0)], 1, F[B]) = \\ &= ((F[x], 1, 0), 1, F[B]) = \\ &= (F[x], (1, 1, F[B]), (0, 1, F[B])) = \\ &= (F[x], 1, F[B]) = \\ &= F[(x, 1, B)] = \\ &= F[S^0_B(x, 1, 0)] = \\ &= F[S^0_B A]. \end{aligned}$$

- Oletame, et teoreemi väide kehtib kõikide termist A lühemate normaalkujuliste Σ'-termide korral. Olgu $A = (x, A_1, A_0)$.

$$\begin{aligned} F[A] \vee F[B] &= F[(x, A_1, A_0)] \vee F[B] = \\ &= ((F[x], F[A_1], F[A_0]), 1, F[B]) = \\ &= (F[x], (F[A_1], 1, F[B]), (F[A_0], 1, F[B])) = \\ &= (F[x], F[A_1] \vee F[B], F[A_0] \vee F[B]) = \\ &= (F[x], F[S^0_B A_1], F[S^0_B A_0]) = \\ &= F[(x, S^0_B A_1), S^0_B A_0] = \\ &= F[S^0_B(x, A_1, A_0)] = \\ &= F[S^0_B A]. \end{aligned}$$

  Analoogiline tõestus ka avaldise $F[A] \wedge F[B]$ korral.

Induktsiooni abil järeldame, et teoreemi väide kehtib kõikide Σ'-termide korral. *Q.E.D.*

Nüüd aga on võimalik täpselt analoogiliselt teoreemiga 3.10 tõestada, et tegemist on SP-algebraga.

4 JÄRELDUSED TEOORIAST

4.1 Lahendus põhiprobleemile

Lähtuvalt teoreemist 3.4 kehtivad SP-algebras neelamisseadused koos idempotentsuse seadusega ja vastupidi. Kuna algebras MVS8 kehtib ainult idempotentsuse seadus, siis järelikult ei saa MVS8 kuuluda klassi SP, mis lihtsamalt väljendudes tähendab seda, et kui skeemi esitatakse SAG mudeliga, siis Voolaine meetodit simuleerimiseks kasutada ei saa. Ei leidu vastavat ternaarset operatsiooni, mistõttu ei leidu ka nn. otsustustabeleid. Algebra MVS8 ei kuulu ka klassi SA, sest klass SA sisaldub täielikult klassis SP, mis tähendab, et sama kehtib ka juhu kohta, kus skeemi esitatakse sellise BDD-ga, mis on konstrueeritud Shannoni arenduse abil.

Piltlikult võib öelda, et SAG mudel sobib vaid siis, kui meid huvitavate omaduste komplektid moodustavad distributiivse võre. Ehkki SAG mudel sisaldab informatsiooni skeemi struktuuri kohta, mida ei saa öelda suvalise BDD mudeli kohta, ei ole võimalik kasutada BDD tüüpi struktuuridele nii loomulikku rekursiivset algoritmi. Kõik katsed leida algoritmi, mis kasutaks SAG mudelit ja simuleeriks skeemi algebra MVS8 terminites, kujutavad endast püüet taastada SAG mudeli abil esialgne skeem, mis seab sügavalt kahtluse alla sellise mudelitüübi otstarbekuse, pidades silmas, et tavalist netlist-tüüpi mudelit kasutades saaksime simuleerida lineaarse ajalise keerukusega (sõltuvalt sisendite arvust). Kaldun isegi arvama, et esialgse skeemi taastamine SAG mudelist ei saa toimuda lineaarses ajas ilma viimatimainitud tegevust hõlbustavate lisastruktuuride kasutamiseta.

Teooriast tuleneb aga lisaks negatiivsele resultaadile üks positiivne fakt: juhul, kui otsustustabelid leiduvad, siis nende sisu on kergesti leitav järgmise valemi abil:

$$(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z.$$

Samuti saime teada, et kui vastav faktoralgebra on distributiivne võre, siis võime kindlad olla, et otsustustabelid leiduvad.

Järgnevates peatükkides toome ära mõningad järeldused BDD-tüüpi mudelite kasutamise kohta testi genereerimise ülesande lahendamisel.

4.2 Roth'i D-arvutusest

Testi genereerimise ülesannet (ühele rikkele) võib sõnastada järgmiselt. Antud on mingi sidu ja rikkega sidu paar. Leida selline sisendi väärtuste komplekt, mille korral korras- ja rikkega sidu väljundväärtused on erinevad. Eeldame, et riketeks on ühekordne konstant-tüüpi rike.

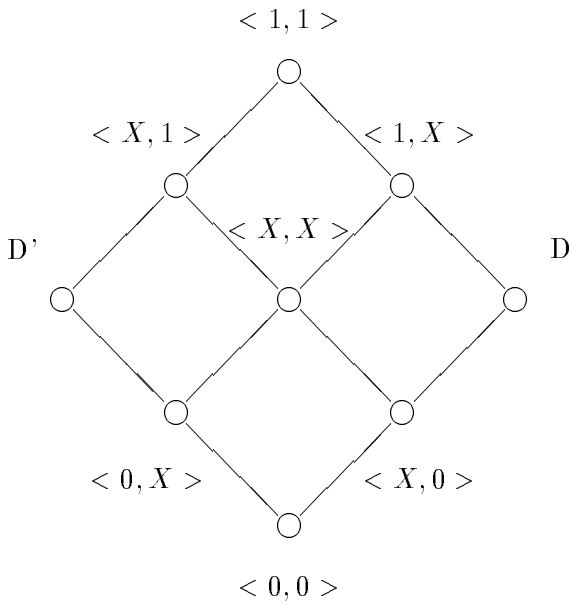
Ülesande lahendamisel on sobiv kasutada algebrat MVS3, milles sümbolit X interpreteeritakse, kui mitte teada olevat väärtust. Sidu ja rikkega sidu paari võib käsitleda ühe siduna, milles igal signaalil oleks nagu kaks väärtust - üks korras sidu kohta ja teine rikkega sidu kohta. Neid väärtuste paare saab seega kujutada kui algebra MVS3 otseruudu elemente. Kokku on neid üheksa. Paari $< 1, 0 >$ on tavaks tähistada sümboliga D, paari $< 0, 1 >$ aga sümboliga D'. Seda algebrat kasutatakse ülesande käigus skeemi simuleerimiseks. Eesmärgiks on leida sellised sisendväärtused, mille korral väljundis on kas D või D'. Sisendväärtusteks võivad olla ainult $< 1, 1 >$, $< 0, 0 >$ ja $< X, X >$.

Algebra MVS3 on distributiivne võre. Järelikult on seda ka otseruut, mille Hasse diagramm on näha jooniselt 13. Järelikult saab leida ka otsustustabelid.

Tavalise, netlist-tüüpi mudeli kasutamisel saab üheksa väärtuse asemel läbi viiega. Selleks kasutatakse nn. modifitseeritud Roth'i D-algebrat, mille baashulgaks on viie-elemendiline hulk $\{0, 1, D, D', X\}$, kus X tähendab, et signaali väärtus pole teada. Vastava algebra Cayley tabelid on joonisel 14.

Kerge on veenduda, et Roth'i D-algebra on idempotentne, kuid neelamisseadus ei kehti, sest

$$(X \wedge D) \vee D = 1.$$



Joonis 13: Algebra MVS3 otseruudu Hasse diagramm

∨	0	1	X	D	D'
0	0	1	X	D	D'
1	1	1	1	1	1
X	X	1	X	1	X
D	D	1	1	D	1
D'	D'	1	X	1	D'

∧	0	1	X	D	D'
0	0	0	0	0	0
1	0	1	X	D	D'
X	0	X	X	X	0
D	0	D	X	D	0
D'	0	D'	0	0	D'

Joonis 14: Roth'i D-algebra Cayley tabelid

Järelikult ei kuulu Roth'i D-algebra klassi SP. Siit järeldub, et viimatimainitud lihtsustus ei ole lubatav, kui kasutada skeemi esitamisel BDD-tüüpi mudelit. Vaja on kasutada kôiki üheksat elementi. See aga teeb simuleerimise tunduvalt aeglasemaks.

4.3 Algebra $MVS3$ ja SAT ülesanne

Testi genereerimine kombinatsioonskeemile on tuntud NP-täielik ülesanne, mis on tihedalt seotud SAT ülesandega, mis seisneb järgnevas. Antud on Boole,i funktsioon. Leida sellised argumendid, mille korral funktsiooni väärtus oleks 1, vôi siis teha kindlaks, et selliseid argumente ei leidu. Selle ülesande lahendamisel kasutatakse tavaliselt nn. branch-and-bound-meetodit. See meetod seisneb lühidalt järgnevas. Valitakse mingi kriteeriumi järgi üks muutuja x ja omistatakse talle väärtus 1 (vôi 0). Ja lahendatakse ära uus SAT- ülesanne, milles on juba üks muutuja vähem. Kui tekkinud uus SAT ülesanne on lahendumatu, siis omistatakse muutujale x vastupidine väärtus. Kui ka siis on tekkinud ülesanne lahendumatu, siis kuulutatakse ka lähteülesanne lahendumatuks. Kuidas konkreetselt valitakse muutujaid ning millise kriteeriumi järgi valitakse esimesena omistatav väärtus, see sôltub juba konkreetsest lahendusalgoritmist. Sellise valiku tôhusus ongi algoritmi headuse kriteeriumiks. Kui

meil oleks mingil viisil võimalik ette ennustada, milline muutuja ja väärtus igal sammul valida, siis lahenduks ülesanne alati polünomiaalses ajas. See fakt on seotud SAT ülesande kuulumisega klassi NP.

Testi genereerimise ülesandes on boole'i funktsiooni asemel digitaalskeem (sidu). Kui joonistada üles branch-and-bound algoritmi tööle vastav puu, siis märkame, et see puu pole tegelikult midagi muud, kui Shannoni arenduse abil saadud (teoreem 3.11) BDD mudelit. Selles analoogias seisnebki BDD-tüüpi mudelite tähtsus.

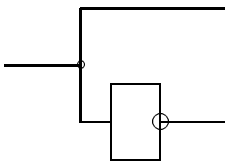
Nagu juba öeldud, on MVS3 distributiivne võre ja järelikult ka SA-algebra, millest järeldub, et kui skeemis pole invertoreid, siis kujutus φ ei muuda termfunktsiooni (samuti kujutus ψ). Mis tähtsus on sellel faktil? Asi on selles, et sümboleid $0, 1, X$, mida skeemis interpreteeritakse vastavalt null, üks ja ei tea, saab tekkinud BDD mudelis interpreteerida järgnevalt: 0-tupik, 1-tautoloogia (sihile jõutakse alati, sõltumata edasisest), X-signaali väärtus oleneb edasisest tegevusest. See pole üksnes sõnademäng. Viimatimainitud interpretatsioon on täiesti korrektne.

Selgitame seda lähemalt. Kui BDD on konstrueeritud Shannoni arenduse abil, siis võttes suvalise tee algtipust terminaalse tipuni, märkame, et iga muutuja esineb seal ülimalt ühe korra. Seega võib öelda, et suvalise tipu järglastele vastavad Boole'i funktsioonid ei sõltu sellele tipule vastavast muutujast. Kuna invertorite puudumise tõttu kehtib iga tipu kohta nn. monotoonsuse tingimus, mis väidab, et tema 1-järglase Boole'i funktsiooni väärtus pole kunagi väiksem 0-järglase Boole'i funktsiooni väärtusest. Seetõttu saab antud tipule vastavat Boole'i funktsiooni f arvutada valemiga

$$f = (x, f_1, f_0) = (x \wedge f_1) \vee f_0,$$

kus f_1 ja f_0 on vastavalt selle tipu 1- ja 0-järglasele vastavad Boole'i funktsioonid. Siit on kerge veenduda, et juhul, kui interpretatsioon on korrektne tipu järglase korral, siis on ta seda ka antud tipu korral.

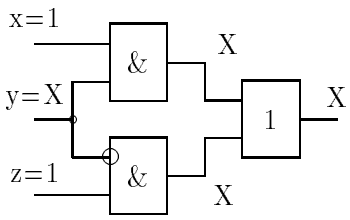
Siit järeldub muuhulgas, et ilma invertoriteta skeemis piisab tautoloogia tuvastamiseks (mis teatavasti on NP-täielik ülesanne) simuleerimisest algebras MVS3, mille keerukus on lineaarne. Seega võime öelda, et SAT ülesande keerukuse üks põhjusi peitub invertorites, eriti just hargnemistes, kus üks haru on inverteeritud (vt. joonis 15). Nimetame seda struktuuri "pahaks kahvliks".



Joonis 15: "Paha kahvel"

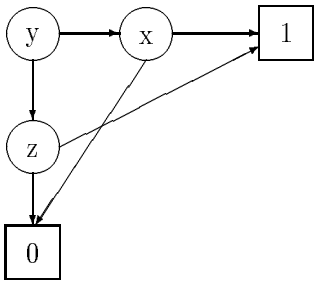
Miks tehakse skeemidele BDD-tüüpi mudeleid? Vastus sellele küsimusele on: neid tehakse selleks, et kiirendada branch-and-bound tüüpi algoritmi sellega, et osa tööd tehakse ära juba mudeli koostamisel. Branch-and-bound meetodi kiirendamine seisneb alati "pahade kahvlite" lõhkumises, mis tähendab aga seda, et uus mudel ei kajasta enam skeemi struktuuri. Seega võib öelda, SAT ülesande raskus peitub skeemi struktuuris ja kaob siis, kui struktuur lõhutakse (avatakse) täielikult näiteks ROBDD koostamisega. Viimane protseduur jätab skeemist alles vaid tema Boole'i funktsiooni, sest ROBDD on viimase normaalkujuks (kanooniliseks esituseks).

Kuidas toimub "pahade kahvlite" lõhkumine skeemi mudeli tegemisel? Selleks vaatame joonisel 16 olevat skeemi, millel on näha MVS3-simuleerimise tulemus. Tulemuseks saime X hoolimata sellest, et



Joonis 16: Simuleerimine algebras MVS3

tegelikult on väljund alati 1 sôltumata muutuja y väärtusest. See on pôhjustatud skeemis esinevast "pahast kahvlist". Järgnevalt vaatleme, kuidas sellest skeemist teha BDD mudel ning kuidas sellega ülesande lahendamise jooksul käituda. Oletame, et esialgu pole muutujate x ja z väärtused veel teada ja ma oleme alles mudeli koostamise faasis. Vôtame esimeseks muutujaks y ja lôhume sellega kahvli. Tekkinud BDD mudel on joonisel 17.



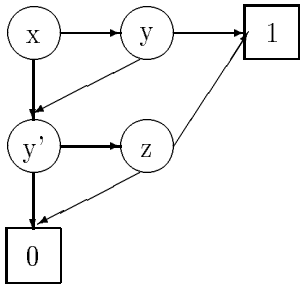
Joonis 17: Skeemi BDD mudel.

Tekkinud BDD on sisuliselt otsimispuu. Oletame, et tekkis situatsioon, kus $x = 1$. Nüüd muudetakse otsimispuud (BDD mudelit) nn. tipureduktsiooni meetodi abil. See seisneb järgnevas: kui meil on teada näiteks muutuja x väärtus 1, siis vastava BDD igas tipus, mille muutujaks on x, teostame tipureduktsiooni, s.t.suuname kôik kaared, mis lôpevad vastavas tipus, selle tipu 1-järglasele. Kui seejuures tekkib tippe, mille 0- ja 1-järglased kokku langevad, siis kaotame need tipud, suunates neil lôppevad kaared nende järglastele. Kui selle protseduuri lôpuks tekib olukord, kus kogu BDD-st on järele jäänud vaid üks terminaalne tipp (ükskôik kumb), siis vôime kindlad olla, et skeemi väljund on üheselt määratud olenemata sisendite väärtustest. Oletame, et lisaks eelnevale saame teada, et $z = 1$. Nüüd on kerge veenduda, et peale tipureduktsiooni jääb BDD-st järele vaid terminaalne tipp 1, mis tähendab, et ka skeemi väljundis on 1 olenemata muutuja y väärtusest.

Mis juhtub, kui BDD mudeliks on SAG?

Vaatleme skeemi SAG-mudelit joonisel 18. Küsime järgmist: kas tipureduktsioonide meetod annab midagi vôrreldes skeemi simuleerimisega algebras MVS3? Osutub, et see meetod ei anna midagi, kui tegemist on SAG mudeliga. Selgitame seda tulemust. Kuna on teada, et MVS3 on distributiivne vôre ja seega SP algebra, siis leidub vastav ternaarne operatsioon, mistôttu saame Voolaine meetodiga SAG-l alati sama tulemuse, kui skeemil algebrat MVS3 kasutades. Tipureduktsioonid ei muuda simuleerimistulemust, sest kehtivad seosed

$$(1, x, y) \;=\; x,$$



Joonis 18: Skeemi SAG mudel.

$$\begin{aligned}(0, x, y) &= y,\\ (x, a, a) &= a.\end{aligned}$$

Järelikult ei anna tipureduktsioonide meetod SAG mudeli korral midagi.

Eelnevast jutust võib teha lihtsa järelduse: kui soovime BDD mudeli koostamisel säilitada skeemi struktuuri, siis tekkinud BDD mudel ei vähenda branch-and-bound meetodi tööaega. Kui aga soovime näiteks testigenereerimise algoritmi kiirust ülalmainitud viisil tõsta, siis oleme sunnitud lõhkuma skeemi struktuuri, mis tähendab tegelikult vaadeldavate rikete hulga vähendamist ja seega saadava testi kvaliteedi langust. SAG mudel on küllaltki sobiv rikete hulga esitamiseks, kuid otsimispuuna ei anna ta midagi juurde.

Võime öelda ka pisut üldisemalt. Kui f on programm, mis teeb skeemist BDD mudeli ja kui f jätab muutumatuks algebra MVS3 termfunktsioonid, siis funktsiooni f poolt koostatud BDD ei aita vähimalgi määral kaasa SAT ülesande efektiivsemale lahendamisele.

Käesolevast tööst selgub täiesti ilmselt, et testi genereerimise ülesande efektiivne lahendamine sõltub eelkõige heast tasakaalust struktuursuse ja funktsionaalsuse vahel. Neid kriteeriume ja vastavaid heuristikaid tuleks otsida reaalsetest skeemidest lähtuvalt. Ei ole olemas mingit ideaalset mudelit, mis kõik probleemid ära lahendaks. Ühe ülesande jaoks on vajalik ühte tüüpi mudelit ning mingi teise ülesande jaoks võib vaja minna mingit teist.

4.4 Lõpetuseks

Toome ühe (võib olla sobimatu) analoogia ühest (loomulikust) keelest teise tõlkimisega. Olgu näiteks mingi raamat tõlgitud inglise keelest eesti keelde. Mis vahe on seejuures heal ja halval tõlkel? Sellele vastata on üpriski raske. Sageli on nii, et kui tõlkija soovib maksimaalselt täpselt edastada seda meeleolu, mis tekkib inglasest lugejal, eesti lugejale, siis tuleb selleks teha järeleandmisi sõnastuse täpsuses. On ka loomulik, et üks tõlkija suudab paremini tõlkida luuletusi, teine aga proosat.

Midagi analoogilist on ka digitaalskeemide simuleerimises. Siin on tõlkimise analoogiks loomulikult mudeli koostamine. Eelneva põhjal võiks siis öelda, et SAG mudel on skeemi "halb tõlge" simuleerimisülesannete jaoks.

Kirjandus

[1] Trevor Evans, *Algebraic structures associated with Latin Squares and Orthogonal arrays. Proc. Conf. on Algebraic Aspects of Combinatorics, pp. 31-52. 1975*

[2] Kalle Kaarli, *Sissejuhatus universaalalgebrasse. Tartu. 1989*

[3] R.E.Bryant, *Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation, IEEE Trans. Comp., vol.C-35, No.8, pp.677-691, Aug. 1986*

[4] S.B.Akers, *Binary Decision Diagram, IEEE Trans. Comp., vol.C-27, No.6, pp.509-516, June 1978*

[5] A.Voolaine, R.Ubar, *Multi-valued simulation on Alternative Graph model of Digital Devices, Fault-tolerant systems and diagnostics. Konv. p.101, Praha 1989,*