# Hulgateooria

Ahto Buldas

Loengukonspekt, 1994 kevadsemester

**1 Keelereeglid ja aksioomid** **3**
1.1 Hulgateooria keel . . . . . 3
1.1.1 Märgistik . . . . . 3
1.1.2 Laused . . . . . 3
1.2 Tõesed laused . . . . . 4
1.2.1 Loogilised aksioomid . . . . . 5
1.2.2 Mõned tõestused . . . . . 6
1.2.3 Tõeväärtus ja tautoloogiad . . . . . 8
1.2.4 Lühendid ja klassisümbolid . . . . . 9
1.2.5 Hulgateooria aksioomid . . . . . 11

**2 Põhistruktuurid** **13**
2.1 Otsekorrutis. Vastavus. Kujutus . . . . . 13
2.1.1 Otsekorrutis . . . . . 13
2.1.2 Vastavus . . . . . 14
2.1.3 Kujutus . . . . . 15
2.1.4 Kommutatiivsed diagrammid . . . . . 18
2.2 Naturaalarvud . . . . . 20
2.2.1 Peano aksioomid . . . . . 20
2.2.2 Naturaalarvude hulga olemasolu . . . . . 21
2.3 Üldine otsekorrutis. Järjend. Jada . . . . . 23
2.4 Relatsioonid . . . . . 24
2.4.1 Relatsiooni mõiste . . . . . 24
2.4.2 Tehted relatsioonidega . . . . . 24
2.4.3 Pöördrelatsioon . . . . . 25
2.4.4 Ühikrelatsioon ja nullrelatsioon . . . . . 27
2.4.5 Binaarsete relatsioonide omadused . . . . . 28
2.4.6 Relatsiooni ahend . . . . . 29
2.4.7 Relatsiooni transitiivne sulund . . . . . 30
2.4.8 Kõrgema aarsusega relatsioonid. Mudelid. Algebralised struktuurid . . . . . 31
2.5 Ekvivalentsid . . . . . 31
2.5.1 Ekvivalentsid ja tükeldused . . . . . 31

2.5.2 Kujutuse tuum . . . . . 34
2.6 Osalised järjestused . . . . . 36
2.6.1 Osalise järjestuse mõiste . . . . . 36
2.6.2 Hasse diagrammid . . . . . 36
2.6.3 Vähim ja minimaalne element . . . . . 37
2.6.4 Duaalsus. Tõkked. Rajad . . . . . 38
2.6.5 Lineaarsed järjestused . . . . . 39
2.6.6 Osaliselt järjestatud hulkade isomorfsus . . . . . 39

**3 Hulkade järjestamine ja võrdlemine** **41**
3.1 Valiku aksioom . . . . . 41
3.2 Minimaalsuse tingimus . . . . . 43
3.2.1 Rangelt kahanevad jadad . . . . . 43
3.2.2 Minimaalsuse tingimus . . . . . 43
3.2.3 Täielikult järjestatud hulgad . . . . . 46
3.3 Ordinaalid . . . . . 46
3.3.1 Ordinaali mõiste . . . . . 46
3.3.2 Ordinaalide omadused . . . . . 47
3.3.3 Kõigi ordinaalide klass . . . . . 49
3.3.4 Transfiniitne induktsioon . . . . . 50
3.3.5 Induktiivsed definitsioonid . . . . . 51
3.3.6 Järjestustüübid . . . . . 52
3.4 Kardinaalid . . . . . 54
3.4.1 Zermelo teoreem. Zorni lemma . . . . . 54
3.4.2 Hulkade võrdlemine . . . . . 56
3.4.3 Lõplikkus . . . . . 59
3.4.4 Kardinaali mõiste . . . . . 61
3.4.5 Hulga võimsus . . . . . 63
3.4.6 Kokkuvõtteks . . . . . 64

## 1.1 Hulgateooria keel

### 1.1.1 Märgistik

Järgnevas tabelis on ära toodud formaalses hulgateoorias kasutatav märgistik.

| | |
|---|---|
| $=$ | (võrdub; on identne) |
| $\in$ | (on elemendiks; kuulub) |
| $A, B, C, ..., Z,$ | |
| $a, b, c, ..., z$ | |
| $\alpha, \beta, \gamma, ...$ | (hulgad; indiviidmuutujad) |
| $\neg$ | (ei ole õige, et) |
| $\wedge$ | (ja) |
| $\vee$ | (või) |
| $\rightarrow$ | (järeldub; kui, siis) |
| $\leftrightarrow$ | (siis ja ainult siis; parajasti siis) |
| $\forall$ | (iga) |
| $\exists$ | (eksisteerib) |
| $(,)$ | (sulud) |

Neid märke kasutatakse hulgateooria lausete ehk valemite moodustamiseks. [1]

### 1.1.2 Laused

**Definitsioon 1.1** *Hulgateooria laused defineerime järgnevalt:*

- **Elementaarlaused**. *Kui $x$ ja $y$ on hulgad, siis*

[1] Tegelikult võiksime piirduda ka lõpliku märgistikuga, tuues ära muutujate jaoks vaid kaks märki: $x$,$'$. Muutujasümboliteks võib siis lugeda $x$, $x'$, $x''$, ... Märgime vaid, et selline võimalus on olemas, kuid seda ei hakka me mõistetavatel põhjustel kasutama inimesele mõeldud teksti korral.

$x = y$ - *hulgad $x$ ja $y$ on identsed*
$x \in y$ - *hulk $x$ on hulga $y$ element*

*on elementaarlaused või ka atomaarsed laused.*

- **Liitlaused**. *Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on laused, siis on laused ka:*
  - $\neg\mathcal{A}$,
  - $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$,
  - $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$,
  - $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$,
  - $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$.

  *Kui $\mathcal{A}(x)$ on lause, milles esineb muutuja $x$, siis on laused ka:*
  - $\forall x\mathcal{A}$,
  - $\exists x\mathcal{A}$.
- *Muid hulgateooria lauseid pole.*

**Definitsioon 1.2**
- *Kui $\mathcal{A}$ on mingi lause, milles esineb muutuja $x$ ja kus ei esine märke $\forall$ ja $\exists$, siis ütleme, et muutuja $x$ esineb lauses $\mathcal{A}$* **vabalt**.
- *Kui muutuja $x$ esineb lauses $\mathcal{A}$, siis ütleme, et lausetes $\forall x\mathcal{A}$ ja $\exists x\mathcal{A}$ esineb muutuja $x$* **seotult**. *Kui mingi teine muutuja $y$ esineb lauses $\mathcal{A}$ vabalt, siis lausetes $\forall x\mathcal{A}$ ja $\exists x\mathcal{A}$ esineb muutuja $y$ samuti vabalt. Lauset $\mathcal{A}$ nimetatakse kvantori* **mõjupiirkonnaks**. *Et eristada kvantorite mõjupiirkondi, on kasutusel sulud, näiteks lause $\forall x[\neg(x \in x)]$. Lauset nimetatakse* **kinniseks**, *kui temas ei esine ükski muutuja vabalt. Vastasel korral nimetame lauset* **predikaadiks**.

Kui $x$ on ainus muutuja, mis esineb vabalt lauses $\mathcal{A}$, siis seda lauset võib lugeda ka nii: hulgal $x$ on omadus $\mathcal{A}$.

## 1.2 Tõesed laused

Eriline koht hulgateooria lausete hulgas on tõestel lausetel. Järgnevalt püüame gi edasi anda, mida mõistetakse tõeste lausete all. Tõeste lausete kirjeldamine toimub kahes etapis. Esimeses etapis loetletakse terve hulk tõeseid lauseid, mida nimetatakse aksioomideks ja seejärel antakse eeskirjad, mille abil saab juba olemasolevatest tõestest lausetest uusi tõeseid lauseid moodustada.

### 1.2.1 Loogilised aksioomid

Kõik järgmise kujuga laused on tõesed:

- (A.1) $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$,
- (A.2) $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$,
- (A.3) $(\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}) \to ((\neg\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B})$,
- (B.1) $\neg\neg\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$,
- (B.2) $\neg\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$,
- (C.1) $\neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$,
- (C.2) $(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B})$,
- (C.3) $\mathcal{A} \to (\neg\mathcal{B} \to \neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$,
- (C.4) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$,
- (C.5) $(\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$,
- (C.6) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$,
- (C.7) $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$,
- (C.8) $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$,
- (C.9) $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \to \neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$,
- (D.1) $\forall x\mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}(y)$, kus $\mathcal{A}$ on suvaline lause, milles muutuja $x$ esineb vabalt ning muutuja $x$ ei asu valemis $\mathcal{A}(x)$ kvantorite $\forall y$ ja $\exists y$ mõjupiirkonnas; valem $\mathcal{A}(y)$ on saadud valemist $\mathcal{A}(x)$, nii et kõik $x$-d on asendatud $y$-tega. [2]
- (D.2) $\mathcal{A}(y) \to \exists x\mathcal{A}(x)$. Samad nõudmised, mis eelmisegi valemi korral.
- (D.3) $(\neg\forall x\mathcal{A}(x)) \leftrightarrow (\exists x\neg\mathcal{A}(x))$,
- (D.4) $\forall x(\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow (\forall x(\mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B})$, kus lause $\mathcal{B}$ ei sisalda muutujat $x$.

[2] Selleks, et nende nõudmiste vajalikkust selgitada vaadelgem valemi $\mathcal{A}(x)$ osas valemit $\exists yK(y,x)$, kus need nõuded pole rahuldatud. Siis saaksime aksioomist D.1, et

$$\forall x\exists yK(x,y) \to \exists yK(y,y).$$

Kujutleme nüüd, et $K(x,y)$ on lause naturaalarvudest ja väidab, et $x$ on rangelt väiksem kui $y$. Selge et saadud lause pole tõene, sest ükski naturaalarv ei saa iseendast rangelt väiksem olla.

- (D.5) $(\exists x(\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow (\exists x(\mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B})$, kus lause $\mathcal{B}$ ei sisalda muutujat $x$.
- (E.1) $x = x$,
- (E.2) $x = y \rightarrow y = x$,
- (E.3) $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$,
- (E.4) $(x = y) \rightarrow (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{A}(y))$, kus valem $\mathcal{A}(y)$ on saadud valemist $\mathcal{A}(x)$, nii et kõik $x$-d on asendatud $y$-ga.

Siin võib tähti $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ asendada suvaliste hulgateooria lausetega. Lisaks sellele kehtib ka järgmised reeglid:

- (MP) (*modus ponens*) Kui laused $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on tõesed, siis ka lause $\mathcal{B}$ on tõene.
- (Gen) Kui lause $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(x)$ on tõene ja muutuja $x$ ei esine vabalt lauses $\mathcal{A}$, siis on tõene ka lause $\mathcal{A} \rightarrow \forall x \mathcal{B}(x)$.
- (Ex) Kui lause $\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A}$ on tõene ja muutuja $x$ ei esine vabalt lauses $\mathcal{A}$, siis on tõene ka lause $\exists x \mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A}$.

Tuleb öelda, et aksioomide arvu ei olegi püütud siin minimiseerida. Rohkem on pööratud tähelepanu tõestuste pikkuste minimiseerimisele. Tegelikult võiks ära jätta kõik B- ja C-grupi aksioomid, kuid see teeks tõestused tohutult pikaks. Et mitte kulutada lugeja aega lausearvutuse formaalsete tõestuste otsimiseks, toome järgnevates osades sisse lausete tõeväärtuse mõiste, mis võimaldab ise enda jaoks sobivaid aksioomide süsteeme koostada. Teeme seda kaalutlusel, et käesolev raamat on pühendatud rohkem hulgateooriale, kui matemaatilisele loogikale, ehkki viimased on lahutamatult seotud. Mitteloogikalisi ehk hulgateooria aksioome vaatleme hiljem.

### 1.2.2 Mõned tõestused

Näitame järgnevalt, et kõik laused kujul $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ on tõesed. Olgu $\mathcal{A}$ mingi lause. Vastavalt aksioomile (A.1) on tõene lause

$$\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}), \tag{1.1}$$

ning vastavalt aksioomile (A.2) on tõene lause

$$(\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})). \tag{1.2}$$

Kasutades lauseid 1.1 ja 1.2 ning reeglit (MP), saame et lause

$$(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$$

on samuti tõene. Kuna lause $\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ on tõene aksioomi (A.1) põhjal, siis reeglit (MP) kasutades saamegi, et lause

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} \tag{1.3}$$

on tõene. Seega võib võtta kõik laused kujul 1.3 uuteks aksioomideks, sest nad tulenevad ülejäänud aksioomidest. Järgnevalt näitame ka seda, kuidas saab juurde teha tuletusreegleid.

Näitame, et kui laused $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on tõesed, siis ka lause $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ on tõene. Kõigepealt näitame, et lause

$$\neg\neg\mathcal{B}$$

on tõene. Aksioomi (C.8) põhjal on tõene lause

$$(\neg\neg\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{B}),$$

millest aga aksioomi (B.1) ning reegli (MP) põhjal järeldub, et ka lause

$$(\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{B})$$

on tõene. Kuna lause $\mathcal{B}$ on tõene eelduse põhjal, siis reeglist (MP) tuleneb, et ka lause $\neg\neg\mathcal{B}$ on tõene.

Aksioomist (C.3) tulenevalt on tõene lause

$$\mathcal{A} \to (\neg\neg\mathcal{B} \to \neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})).$$

Kuna $\mathcal{A}$ on tõene eelduse põhjal, siis reeglist (MP) järelduvalt on tõene lause

$$\neg\neg\mathcal{B} \to \neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}),$$

millest omakorda reegli (MP) põhjal järeldub, et lause

$$\neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$$

on tõene. Jääb veel rakendada aksioomi (C.1) ja reeglit (MP), millest saamegi, et $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ on tõene.

Nüüd võime oma reeglistikku täiendada reegliga: kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on tõesed laused, siis ka $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ on tõene lause.

Nagu võis näha, on tõeste lausete tuletamine formaalsetest süsteemidest tuletusreeglite abil üpris vaevanõudev tegevus. Järgmises jaotises toome ära ühe võimaluse, kuidas ilma erilise vaevata saab aksioome ning tuletusreegleid juurde teha.

Järgnevalt anname veel mõningaid juhiseid, mis hõlbustavad lausete tõestamist. Kui lause $\mathcal{A}(x)$ on tõene, sisaldab muutujat $x$ vabalt, siis ka lause $\forall x \mathcal{A}(x)$ on tõene. Tõepoolest, vastavalt aksioomile (A.1) on lause

$$\mathcal{A}(x) \to (a = a \to \mathcal{A}(x))$$

tõene, millest reegli (MP) põhjal on tõene ka lause $(a = a \to \mathcal{A}(x)$. Nüüd kasutame reeglit (Gen), millest järeldub, et ka lause

$$a = a \to \forall x \mathcal{A}(x)$$

on tõene. Kasutades aksioomi (E.1) ja reeglit (MP) saamegi, et lause $\forall x \mathcal{A}(x)$ on tõene.

Ja nüüd veel üks kasulik märkus, mis hõlbustab selliste lausete tõestamist, mis on kujul $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, kus $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on kinnised laused. Väidame, et kui me võtame lause $\mathcal{A}$ uueks aksioomiks [3] ning kui selles uues süsteemis on lause $\mathcal{B}$ tõene, siis lause $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ peab olema tõene esialgses süsteemis.

Kui lause $\mathcal{A}$ sisaldab vabu muutujaid ning kui lause $\mathcal{B}$ on tõene sellises süsteemis, kus aksioomidele on lisatud lause $\mathcal{A}$, ning reeglitele (Gen) ja (Ex) on lisatud tingimus: muutuja $x$ ei tohi sisalduda vabalt lauses $\mathcal{A}$, siis lause $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on tõene esialgses süsteemis. Seda me siin demonstreerima ei hakka, kuna siis kalduksime liialt matemaatilisse loogikasse.

### 1.2.3 Tõeväärtus ja tautoloogiad

Oletame, et igale hulgateooria kinnisele lausele on vastavusse seatud kas märk $T$ (tõene) või märk $V$ (väär), mida nimetame lause tõeväärtuseks, kusjuures:

- Lausele kujul $\neg\mathcal{A}$ on vastavusse seatud tõeväärtus $T$, kui lause $\mathcal{A}$ tõeväärtus on $V$, ning $V$, kui lause $\mathcal{A}$ tõeväärtus on $T$.
- Lause $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tõeväärtus on $V$, kui lause $\mathcal{A}$ tõeväärtus on $T$ ja lause $\mathcal{B}$ tõeväärtus on $V$. Ülejäänud kolmel juhul on selle lause tõeväärtus $T$.
- Lause $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ tõeväärtus on $T$ kui nii lause $\mathcal{A}$ kui ka lause $\mathcal{B}$ tõeväärtus on $T$. Vastasel korral on selle lause tõeväärtus $V$.
- Lause $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ tõeväärtus on $V$ kui nii lause $\mathcal{A}$ kui ka lause $\mathcal{B}$ tõeväärtus on $V$. Vastasel korral on selle lause tõeväärtus $T$.
- Lause $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ tõeväärtus on $T$, kui lausetel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on ühesugused tõeväärtused. Vastasel juhul on selle lause tõeväärtus $V$.

Need tingimused saab esitada järgmise tabeli abil:

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\neg\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $V$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $T$ | $V$ |
| $V$ | $T$ | $T$ | $T$ | $V$ | $T$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $T$ | $T$ | $V$ | $V$ | $T$ |

[3] Siin on $\mathcal{A}$ all mõeldud ühte konkreetset lauset, mitte aga tervet lausete skeemi. Ei saa ju kasutada aksioomi: kõik laused kujul $\mathcal{A}$ on tõesed, kus $\mathcal{A}$ on suvaline lause. Siis oleksid absoluutselt kõik laused tõesed ja meie teooria oleks vasturääkiv.

Näitame, et näiteks lausele kujul $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ vastab alati tõeväärtus $T$, ükskõik kuidas me lausetele tõeväärtusi vastavusse seame. Tõepoolest, koostame tabeli:

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ | $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $V$ | $T$ | $T$ |
| $V$ | $T$ | $V$ | $T$ |
| $V$ | $V$ | $T$ | $T$ |

Tabelist ongi näha, et lause $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ tõeväärtus ei sõltu sellest, millised on lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tõeväärtused.

**Definitsioon 1.3** *Kui $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... on laused ning nendest lausetest on lubatud võtetega kokku pandud lause $L(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$, mille tõeväärtus ei sõltu lausete $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... tõeväärtusest, siis seda lauset nimetatakse* **tautoloogiaks**.

Tautoloogiaid võib võtta uuteks aksioomideks. [4] See lubab oluliselt lihtsustada mõningate teoreemide tõestusi ning võimaldab lugejal koostada endale meelepärase aksiomaatika. Palju hõlpsam on kontrollida, et lause $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ on tautoloogia, kui seda tõestada tuletusreeglite abil, naga seda eespool tehti.

### 1.2.4 Lühendid ja klassisümbolid

Nii nagu iga loomulik keel täieneb aja jooksul, nii ka hulgateooria keelde tuuakse järjest uusi väljendeid, mis defineeritakse eelnevate väljendite kaudu. Sageli on vaja sisse tuua lühendeid, mille olemasoluta veniksid laused liiga pikaks, ega oleks neid lugevale inimesele enam arusaadavad.

Lühendite sissetoomisel kasutame märki $\equiv$, mis ise ei kuulu keelde. Lühend ise kirjutatakse märgist $\equiv$ vasakule, ning lühendi tähendus paremale. Näiteks

$$x \subseteq y \equiv \forall z(z \in x \to z \in y).$$

Lauset $x \subseteq y$ loetakse: hulk $x$ on hulga $y$ alamhulk. Kasutame edaspidi lühenditena ka märkide läbikriipsutusi, näiteks:

$$\begin{aligned} x \notin y &\equiv \neg(x \in y) \\ x \not\subseteq y &\equiv \neg(x \subseteq y) \\ x \neq y &\equiv \neg(x = y) \end{aligned}$$

Sellist tüüpi lühendeid võib nimetada lauselühendeiks, sest nad kujutavad endast hulgateooria lauseid.

Järgnevalt täiendame tähestikku nn. **klassisümbolitega**, mida võib lausetes kasutada kui hulki. Vahe on vaid selles, et lausete lugemisel ei nimetata neid hulkadeks, vaid **klassideks**, ning on neid ei tohi siduda kvantoritega.

[4] Saab näidata, et kõik tautoloogiad on tõesed laused ka esialgases teoorias, s.t. kõik nad on aksioomide ja tuletusreeglite abil tõestatavad.

**Definitsioon 1.4** *Kui $\mathcal{A}(z)$ on lause, milles muutuja $z$ esineb vabalt, siis $\{z \mid \mathcal{A}(z)\}$ on klassisümbol. Seda loetakse: kõikide selliste hulkade klass, millel on omadus $\mathcal{A}$. Selle sümboli esinemist lausetes tuleb tõlgendada järgnevalt:*

$$\begin{aligned} t \in \{z \mid \mathcal{A}(z)\} &\equiv \mathcal{A}(t) \\ x = \{z \mid \mathcal{A}(z)\} &\equiv \forall t(t \in x \leftrightarrow \mathcal{A}(t)) \\ \{z \mid \mathcal{A}(z)\} \in y &\equiv \exists x(x \in y \wedge x = \{z \mid \mathcal{A}(z)\}) \\ \{z \mid \mathcal{A}(z)\} \in \{t \mid \mathcal{B}(t)\} &\equiv \exists x(x \in \{t \mid \mathcal{B}(t)\} \wedge x = \{z \mid \mathcal{A}(z)\}) \\ \{z \mid \mathcal{A}(z)\} = \{t \mid \mathcal{B}(t)\} &\equiv \forall t(\mathcal{A}(t) \leftrightarrow \mathcal{B}(t)), \end{aligned}$$

*kus $\mathcal{A}(t)$ on lause, mis on saadud lausest $\mathcal{A}(z)$, nii et kõik muutuja $z$ esinemised on asendatud muutuja $t$ esinemistega.* [5]

Paljudel klassisümbolitel on omakorda lühendid. Toome neist mõned siin ära. Hiljem defineerime neid vajaduse korral juurde.

$$\begin{aligned} \{x, y\} &\equiv \{z \mid z = x \vee z = y\} \\ \{x\} &\equiv \{z \mid z = x\} \\ \mathcal{P}(x) &\equiv \{z \mid z \subseteq x\} \\ x \cup y &\equiv \{z \mid z \in x \vee z \in y\} \\ x \cap y &\equiv \{z \mid z \in x \wedge z \in y\} \\ \cup x &\equiv \{z \mid \exists t(z \in t \wedge t \in x)\} \\ \cap x &\equiv \{z \mid \forall t(t \in x \rightarrow z \in t)\} \\ \mathcal{S} &\equiv \{z \mid z = z\} \\ \emptyset &\equiv \{z \mid z \neq z\} \end{aligned}$$

Nendel klassidel on ka oma nimed, mis on toodud alljärgnevas tabelis.

| Klass | Nimetus |
|---|---|
| $\{x, y\}$ | paar |
| $\{x\}$ | ühe-elemendiline klass |
| $\mathcal{P}(x)$ | hulga $x$ kõikide alamhulkade klass |
| $x \cup y$ | hulkade $x$ ja $y$ ühend |
| $x \cap y$ | hulkade $x$ ja $y$ ühisosa |
| $\cup x$ | hulga $x$ elementide ühend |
| $\cap x$ | hulga $x$ elementide ühisosa |
| $\mathcal{S}$ | kõikide hulkade klass |
| $\emptyset$ | tühi klass |

Lauset $\exists x(x = \{z \mid \mathcal{A}(z)\})$ loetakse: $\{z \mid \mathcal{A}(z)\}$ on hulk. Näiteks lauset $\exists z(z = x \cap y)$ loetakse: hulkade $x$ ja $y$ ühisosa on hulk.

[5] Eeldame siinkohal, et lause $\mathcal{A}(z)$ ei sisalda vabalt muutujat $t$.

### 1.2.5 Hulgateooria aksioomid

**Aksioom 1.1 (Ekstensionaalsus)** *Kui kaks hulka koosnevad samadest elementidest, siis nad on identsed, s.t. järgnev lause on tõene:*

$$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y). \tag{1.4}$$

**Aksioom 1.2 (Tühja hulga aksioom)** *Leidub hulk, milles pole ühtegi elementi.*

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

Nendest kahest aksioomist järeldub, et leidub parajasti üks selline hulk, milles pole ühtegi elementi, s.t. lause

$$\forall x \forall y [\forall t(t \notin x) \wedge \forall t(t \notin y) \to x = y]$$

on tõene. Tõepoolest, oletame, et laused $\forall t(t \notin x)$ ja $\forall t(t \notin y)$ tõesed. Aksioomist (D.1) järeldub, et lause

$$\forall t(t \notin x) \to u \notin x$$

on tõene, millest reegli (MP) põhjal on tõene ka lause $u \notin x$. Aksioomist (B.2) ja reeglist (MP) saame nüüd, et lause $u \in x \to u \in y$ on tõene. Analoogiliselt võib veenduda lause $u \in y \to u \in x$ tõesuses. Järelikult on tõene ka lause

$$(u \in x \to u \in y) \wedge (u \in y \to u \in x),$$

millest aksioomi (C.6) ja reegli (MP) põhjal

$$u \in x \leftrightarrow u \in y.$$

Järelikult on tõene ka lause $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Ekstensionaalsuse aksioomist tulenevalt on lause

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$$

tõene ja kasutades reeglit (MP), saame $x = y$. [6] Seega on kõik tühjad hulgad identsed. Kerge on ka tõestada, et kui $x$ on hulk, milles pole ühtegi elementi, siis $x = \emptyset$. [7] Seetõttu saab tühja hulga aksioomi ümber sõnastada: tühi klass on hulk.

Edaspidistes tõestustes ei lasku me sellistesse detailidesse, kuid oluline on siiski märkida, et kõik edaspidised tõestused on viidavad selliste detailideni.

[6]Pange tähele, et me ei kasutanud kordagi muutujate $x$ ja $y$ suhtes reegleid (Gen) ja (Ex). Seega on implikatsioon

$$\forall t(t \notin x) \wedge \forall t(t \notin y) \to x = y$$

tõene. Nüüd saab kasutada reeglit (Gen).

[7]Kui öeldakse $x = \emptyset$, siis mõeldakse loomulikult seda, et lause $x = \emptyset$ on tõene.

**Aksioom 1.3 (Paari aksioom)** *Kui $x$ ja $y$ on hulgad, siis paar $\{x, y\}$ on hulk, s.t.*

$$\forall x, y \exists z (z = \{x, y\})$$

**Aksioom 1.4 (Ühendi aksioom)** *Kui $x$ on hulk, siis tema elementide ühend on samuti hulk, s.t.*

$$\forall x \exists y (y = \cup x).$$

**Aksioom 1.5 (Astme aksioom)** *Kui $x$ on hulk, siis $\mathcal{P}(x)$ on hulk, s.t.*

$$\forall x \exists y (y = \mathcal{P}(x)).$$

**Aksioom 1.6 (Eraldamise aksioomid)** *Kui $x$ on hulk, ja $\mathcal{A}$ on suvaline lause, siis $\{z \mid z \in x \wedge \mathcal{A}\}$ on hulk, s.t.*

$$\forall x \exists t (t = \{z \mid z \in x \wedge \mathcal{A}\}).$$

Kui võtta lauseks $\mathcal{A}$ lause $z \in y$, siis aksioomist 1.6 tulenevalt eksisteerib hulk

$$t = \{z \mid z \in x \wedge z \in y\},$$

mis pole aga midagi muud kui hulkade $x$ ja $y$ ühisosa $x \cap y$.

**Aksioom 1.7 (Regulaarsus)** *Kui $x$ on mittetühi hulk, siis on tal element $y$, millel puuduvad hulgaga $x$ ühised elemendid, s.t.*

$$\forall x \exists y (x = \emptyset \vee (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$$

Ülimalt tähtis aksioom, mis muuhulgas keelab ära sellised hulgad, mis on iseenda elemendiks.

Ülejäänud aksioome vaatleme hiljem, sest neid ei lähe meil esialgu vaja.

## 2.1 Otsekorrutis. Vastavus. Kujutus

### 2.1.1 Otsekorrutis

Et defineerida keerulisemaid matemaatika struktuure, on tingimata vaja nn. järjestatud paare, s.t. hulki $\langle a, b\rangle$, kus $a$ ja $b$ võivad olla suvalised hulgad. Järjestatud paaridel peaks olema järgmine omadus:

$$\forall x, y, z, t(\langle x, y\rangle = \langle z, t\rangle \leftrightarrow x = z \wedge y = t).$$

Poola matemaatik Kuratowski näitas, et järjestatud paari mõiste saab defineerida paari mõiste abil kasutades paari aksioomi. Selle definitsiooni me ka siin ära toome.

**Definitsioon 2.1** *Järjestatud paariks elementidest $a$ ja $b$ nimetatakse hulka*

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \tag{2.1}$$

**Definitsioon 2.2** *Hulkade $A$ ja $B$ otsekorrutiseks $A \times B$ nimetatakse hulka, mis koosneb kõikidest järjestatud paaridest $\langle a, b\rangle$, nii et $a \in A$ ja $b \in B$.*

**Teoreem 2.1** *Kui $A$ ja $B$ on hulgad, siis leidub hulk $A \times B$.*

*Tõestus.*

1. Suvaliste hulkade A ja B korral leidub paar {A,B}, mis on üheselt määratud. (Järeldub aksioomist 1.3).

2. Kui $\{A, B\}$ on hulk mille elemendid on A ja B, siis on hulk ka nende elementide ühend $A \cup B$. (Järeldub aksioomist 1.4).

3. Kui $a \in A$ ja $b \in B$, siis $\{a, b\} \subseteq A \cup B$ ja $\{a\} \subseteq A \cup B$. Sellest järeldub, et $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in P(P(A \cup B))$.

4. Hulk $\{t \in P(P(A \cup B)) \mid \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge t = \langle a, b\rangle)\}$ eksisteerib aksioomide 1.6 põhjal.

Seega leidub hulk $A \times B$, mille elementideks on kõik järjestatud paarid $\langle a, b\rangle$, nii et $a \in A$ ja $b \in B$ ning mingeid muid elemente selles hulgas pole.

$$A \times B = \{t \in P(P(A \cup B)) \mid \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge t = \langle a, b\rangle)\}$$

**Definitsioon 2.3** *Hulga $A$ otseruuduks nimetatakse hulka $A \times A$,*

Mitmel pool kirjanduses kasutatakse tähistust

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\},$$

mis aga ei lähe kokku eelmises peatükis antud definitsiooniga aksioomide 1.6 juures ja võib põhjustada segadusi.

### 2.1.2 Vastavus

**Definitsioon 2.4** *Vastavuseks hulkade $A$ ja $B$ vahel nimetatakse nende otsekorrutise $A \times B$ suvalist osahulka.*

**Definitsioon 2.5** *Olgu $\varphi$ suvaline vastavus ja $\langle a, b\rangle \in \varphi$. Oeldakse, et elemendid $a$ ja $b$ on vastavuses $\varphi$, ning kirjutatakse $a\ \varphi\ b$, s.t.*

$$a\ \varphi\ b \equiv \langle a, b\rangle \in \varphi.$$

**Definitsioon 2.6** *Vastavuste $\varphi$ ja $\psi$ kompositsiooniks ehk liitvastavuseks $\varphi \circ \psi$ nimetatakse hulka*

$$\varphi \circ \psi = \{\langle a, c\rangle \mid \exists b(\langle a, b\rangle \in \varphi \wedge \langle b, c\rangle \in \psi)\}.$$

Kuna vastavused on järjestatud paaride hulgad, siis rääkides vastavuste võrdsusest, mõtleme selle all alati nende, kui hulkade identsust, s.t.

$$\varphi = \psi \equiv \forall z(z \in \varphi \leftrightarrow z \in \psi).$$

**Teoreem 2.2** *Vastavuste kompositsioonil on assotsiatiivsuse omadus*

$$(\varphi \circ \psi) \circ \chi = \varphi \circ (\psi \circ \chi).$$

*Tõestus.* Kasutame vastavuste kompositsiooni definitsiooni.

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi) \circ \chi &= \{\langle a, d\rangle \mid \exists c(a\ (\varphi \circ \psi)\ c \wedge c\ \chi\ d)\} = \\
&= \{\langle a, d\rangle \mid \exists c(\exists b(a\ \varphi\ b \wedge b\ \psi\ c) \wedge c\ \chi\ d)\} = \\
&= \{\langle a, d\rangle \mid \exists c \exists b(a\ \varphi\ b \wedge b\ \psi\ c \wedge c\ \chi\ d)\} = \\
&= \{\langle a, d\rangle \mid \exists b(a\ \varphi\ b \wedge \exists c(b\ \psi\ c \wedge c\ \chi\ d))\} = \\
&= \{\langle a, d\rangle \mid \exists b(a\ \varphi\ b \wedge b\ (\psi \circ \chi)\ d)\} = \\
&= \varphi \circ (\psi \circ \chi).
\end{aligned}$$

### 2.1.3 Kujutus

**Definitsioon 2.7** *Vastavust $\varphi \subset A \times B$ nimetatakse kujutuseks määramispiirkonnaga $A$, kui hulga $A$ iga elemendi $x$ korral leidub parajasti üks $y \in B$ nii, et $\langle x, y\rangle \in \varphi$, s.t.*

$$\forall x \exists y (x \in A \to \langle x, y\rangle \in \varphi),$$
$$\forall x, y, z (\langle x, y\rangle \in \varphi \wedge \langle x, z\rangle \in v \to y = z).$$

Kujutuse sünonüümideks on funktsioon, operaator, ühene vastavus. Kui $\varphi \subseteq A \times B$ on kujutus määramispiirkonnaga A, siis kirjutame

$$\varphi\colon A \to B, \text{või ka } A \xrightarrow{\varphi} B.$$

**Definitsioon 2.8** *Olgu $\varphi$ suvaline kujutus ja $\langle x, y\rangle \in \varphi$. Öeldakse, et element $x$ kujutub elemendiks $y$ ning kirjutatakse $x\varphi = y$ või $\varphi(x) = y$.*

$$x\varphi = y \equiv \langle x, y\rangle \in \varphi.$$

Kui $\varphi\colon A \to B$, siis nimetatakse hulka $A$ **lähtehulgaks** ja hulka $B$ **sihthulgaks**. Kui $x\varphi = y$, siis elementi $x$ nimetatakse elemendi $y$ **originaaliks** kujutusel $\varphi$ ning elementi $y$ nimetatakse elemendi $x$ **kujutiseks**.

**Definitsioon 2.9** *Kui $A \xrightarrow{\phi} B$ on kujutus, siis hulka*

$$\operatorname{Im} \phi = \{b \mid b \in B \wedge \exists a (a\phi = b)\}$$

*nimetatakse* **kujutiste hulgaks**.

Kuna kujutus on vastavuse erijuht, siis on kujutuste kompositsioon defineeritud sarnaselt vastavuste kompositsioonile.

Kujutuste kompositsiooni nimetatakse ka liitkujutuseks. Tänu kujutuse ühesuse nõudele kehtib liitkujutuse korral võrdus

$$x(\varphi \circ \psi) = (x\varphi)\psi.$$

Kuna iga kujutus on vastavus, siis on järelikult ka kujutuste kompositsioonil assotsiatiivsuse omadus.

**Definitsioon 2.10** **Samasuskujutuseks** *hulgal $A$ nimetatakse kujutust $1_A\colon A \to A$, mis kujutab iga elemendi $x \in A$ iseendaks, s.t.*

$$\forall x (x \in A \to x 1_A = x).$$

On lihtne näidata, et iga hulga $A$ korral leidub samasuskujutus $1_A$. Selleks on hulk

$$1_A = \{z \mid \exists x (x \in A \wedge z = \langle x, x\rangle)\}.$$

**Teoreem 2.3** *Kui* $\varphi\colon A \to B$ *ja* $\psi\colon C \to A$ *on kujutused, siis kehtivad samasused*

$$\begin{aligned} 1_A \circ \varphi &= \varphi, \\ \psi \circ 1_A &= \psi. \end{aligned}$$

**Tõestus.**

$$\begin{aligned} 1_A \circ \varphi &= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in 1_A \wedge \langle z, y\rangle \in \varphi)\} = \\ &= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(x = z \wedge \langle z, y\rangle \in \varphi)\} = \\ &= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(x = z) \wedge \langle x, y\rangle \in \varphi\} = \\ &= \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \varphi\} = \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

Tõepoolest, lause $\exists z(x = z)$ on samaselt tõene. Teoreem on tõestatud.

**Definitsioon 2.11** *Kujutust* $\varphi\colon A \to B$ *nimetatakse üksüheseks kujutuseks (injektsiooniks), kui igal kujutisel leidub parajasti üks originaal.*

$$\forall a, b(a\psi = b\psi \to a = b).$$

**Definitsioon 2.12** *Kujutust* $\varphi\colon A \to B$ *nimetatakse pealekujutuseks (sürjektsiooniks), kui hulga* $B$ *igal elemendil* $b \in B$ *leidub vähemalt üks originaal.*

$$\forall b \exists a(b \in B \to b = a\varphi).$$

**Definitsioon 2.13** *Kujutust nimetatakse bijektsiooniks, kui ta on nii injektsioon kui ka sürjektsioon.*

**Teoreem 2.4** *Kujutus* $\varphi\colon A \to B$ *on bijektsioon parajasti siis, kui leidub selline kujutus* $\psi\colon B \to A$*, nii et kehtivad samasused*

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi &= 1_A, \\ \psi \circ \varphi &= 1_B. \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Kujutust* $\psi$ *nimetatakse seljuhul kujutuse* $\varphi$ *pöördkujutuseks ja tähistatakse* $\varphi^{-1}$*.* [1]

**Tõestus** Olgu $A \xrightarrow{\varphi} B$ bijektsioon. Võtame

$$\psi = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in B \times A \wedge \langle y, x\rangle \in \varphi\}$$

[1] Selline tähistus on lubatud, sest kerge on kontrollida, et igal kujutusel võib olla ülimalt üks pöördkujutus.

ning veendume, et $\psi$ on kujutus määramispiirkonnaga $B$. See tuleneb faktist, et $\varphi$ on bijektsioon. Seosed 2.2 kehtivad. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi &= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi \wedge \langle z, y\rangle \in \psi)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi \wedge \langle z, y\rangle \in B \times A \wedge \langle y, z\rangle \in \varphi)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi \wedge \langle y, z\rangle \in \varphi \wedge \langle z, y\rangle \in B \times A)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi \wedge \langle y, z\rangle \in \varphi \wedge x = y \wedge \langle z, y\rangle \in B \times A)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi \wedge \langle x, z\rangle \in \varphi \wedge x = y \wedge \langle z, x\rangle \in B \times A)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid x = y \wedge \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi \wedge \langle x, z\rangle \in A \times B)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid x = y \wedge \exists z(\langle x, z\rangle \in \varphi)\} = \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid x = y \wedge x \in A\} = \\
&= 1_A.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt tõestatakse teine võrdus.

Olgu nüüd $B \xrightarrow{\psi} A$ selline kujutus, et võrdused 2.2 kehtivad. Kujutus $\varphi$ on injektsioon, sest

$$\begin{aligned}
x\varphi = y\varphi &\Rightarrow (x\varphi)\psi = (y\varphi)\psi \Rightarrow \\
&\Rightarrow x(\varphi \circ \psi) = y(\varphi \circ \psi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x1_A = y1_A \Rightarrow \\
&\Rightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Kujutus $\varphi$ on sürjektsioon, sest suvalisel hulga $B$ elemendil $y$ leidub originaal. Selleks on element $y\psi$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
(y\psi)\varphi &= y(\psi \circ \varphi) = y1_B = \\
&= y.
\end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Kui $A$ ja $B$ on suvalised hulgad, siis kõik kujutused $\varphi \colon A \to B$ moodustavad hulga, mida tähistatakse $MAP(A, B)$ või ka $B^A$. Tõepoolest, hulga $B^A$ saab defineerida järgmiselt:

$$B^A = \{\phi \mid \phi \in P(A \times B) \wedge \forall x(x \in A \to \exists y \forall z(\langle x, z\rangle \in \phi \leftrightarrow y = z))\}$$

**Teoreem 2.5** *Kujutus $A \xrightarrow{\phi} B$ on injektiivne parajasti siis kui iga hulga $C$ ja iga kahe kujutuse $\psi_1, \psi_2 \in A^C$ korral kehtib lause*

$$\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \to \psi_1 = \psi_2. \tag{2.3}$$

*Tõestus.* Olgu $A \xrightarrow{\phi} B$ injektsioon ning $\psi_1, \psi_2 \in A^C$ olgu kujutused, mille korral kehtib lause $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$. Näitame, et $\psi_1 = \psi_2$. Olgu $c \in C$ hulga $C$

suvaline element. Järelikult $c\psi_1\phi = c\psi_2\phi$, millest kujutuse $\phi$ injektiivsuse tõttu $c\psi_1 = c\psi_2$. Seega $\psi_1 = \psi_2$, sest me valisime elemendi $c$ suvaliselt.

Oletame, et mingi kujutuse $A \xrightarrow{\phi} B$ korral kehtib valem 2.3. Näitame, et kujutus $\phi$ on injektiivne. Olgu $a_1\phi = a_2\phi$ mingite elementide $a_1, a_2 \in A$ korral. Võtame hulgaks $C$ üheelemendilise hulga $\{\emptyset\}$ ning kaks kujutust $\psi_1 = \{<\emptyset, a_1>\}$ ja $\psi_2 = \{<\emptyset, a_2>\}$. Kuna $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$, siis järelikult $\psi_1 = \psi_2$ ning $a_1 = a_2$. Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 2.6** *Kujutus $A \xrightarrow{\phi} B$ on sürjektiivne parajasti siis, kui iga hulga $C$ ja iga kahe kujutuse $psi_1, \psi_2 \in C^B$ korral kehtib lause*

$$\phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \rightarrow \psi_1 = \psi_2. \tag{2.4}$$

*Tõestus.* Olgu $A \xrightarrow{\phi} B$ sürjektsioon ning $\psi_1, \psi_2 \in C^B$ olgu kujutused, mille korral $\phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2$. Näitame, et $\psi_1 = \psi_2$. Olgu $b \in B$ hulga $B$ suvaline element. Kujutuse $\phi$ sürjektiivsuse tõttu leidub element $a \in A$, nii et $a\phi = b$, ning

$$b\psi_1 = a\phi\psi_1 = a\phi\psi_2 = b\psi_2,$$

millest järeldub, et $\psi_1 = \psi_2$, sest me valisime elemendi $b$ suvaliselt.

Oletame, et mingi kujutuse $A \xrightarrow{\phi} B$ korral kehtib lause 2.4. Näitame, et kujutus $\phi$ on sürjektiivne. Võtame hulgaks $C$ kaheelemendilise hulga $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Kujutus $\psi_1$ kujutagu kõik hulga $B$ elemendid elemendiks $\emptyset$, kujutus $\psi_2$ olgu defineeritud järgmiselt:

$$b\psi_2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{kui } b \in \operatorname{Im}\phi \\ \{\emptyset\}, & \text{kui } b \notin \operatorname{Im}\phi \end{cases}$$

Selge, et $\phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2$, millest tingimuse 2.4 tõttu järeldub, et $\psi_1 = \psi_2$, mis on aga võimalik ainult siis, kui $\operatorname{Im}\phi = B$, s.t. kui $\phi$ on sürjektiivne. Teoreem on tõestatud. [2]

### 2.1.4 Kommutatiivsed diagrammid

Kujutustega opereerimisel on mugav arutluskäike visualiseerida. Selleks kasutatakse nn. kommutatiivseid diagramme, s.t. jooniseid hulga ja kujutiste tähistega. Näiteks ütleme, et diagramm

[2] Ah et milleks sellised kentsakad konstruktsioonid? Asi on selles, et hulgaks $C$ saame võtta üksnes sellise hulga, mille kohta me kindlalt teame, et ta eksisteerib. Valitud hulk on tegelikult lihtsaim võimalik.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & C \\ B \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

on kommutatiivne, kui $\chi = \phi \circ \psi$. Nelinurkne diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & C \arrow[d, "\mu"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & D \end{tikzcd}$$

on kommutatiivne, kui $\chi \circ \mu = \phi \circ \psi$. Samasuskujutuse tähistuseks kasutatakse diagrammides topeltjoont. Näiteks teoreemi 2.4 saab kommutatiivsete diagrammide keeles sõnastada järgmiselt:

Kujutus $A \xrightarrow{\varphi} B$ on bijektsioon parajasti siis, kui leidub kujutus $B \xrightarrow{\psi} A$, nii et järgmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, equal] \\ A & B \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

**Ülesanne 2.1** *Näidata, et järgmised definitsioonid on lubatud (s.t. kujutavad endast hulki). Olgu $\varphi\colon A \to B$ mingi kujutus.*

$$\begin{aligned} \bigcup_{a \in A} \varphi(a) &= \{x \mid \exists a(a \in A \wedge x \in \varphi(a))\}, \\ \bigcap_{a \in A} \varphi(a) &= \{x \mid \forall a(a \in A \to x \in \varphi(a))\}. \end{aligned}$$

*Teises võrduses tuleb eeldada, et $A$ on mittetühi hulk, sest vastasel korral kujutaks defineeritud hulk endast kõikide hulkade hulka.*

## 2.2 Naturaalarvud

### 2.2.1 Peano aksioomid

Kuni eelmise sajandi lõpuni käsitleti naturaalarve intuitiivselt, s.t. kõik teadsid, mis naturaalarvud on ja oskasid nendega opereerida, tajudes intuitiivselt nende omadusi. Aastal 1889 koostas itaalia matemaatik Guiseppe Peano esimese naturaalarvude aksiomaatika, mille esitame pisut muudetud kujul. Peano defineeris naturaalarvude hulga, kui kolmiku $(\omega, 0,^{+}) = <\omega, <0,^{+}>>$, kus $^{+}: \omega \longrightarrow \omega$ on kujutus. Hulga $\omega$ elemente nimeatas Peano **naturaalarvudeks**, hulka 0 **nulliks** ja elemendi $x \in \omega$ kujutist $x^{+}$ nimetas ta naturaalarvu $x$ **järglaseks**. Lisaks sellele nõudis ta, et kehtiksid järgmised omadused:

1. Null on naturaalarv, s.t.
$$0 \in \omega.$$

2. Null ei ole mitte ühegi naturaalarvu järglaseks, s.t.
$$\forall x(x \in \omega \rightarrow x^{+} \neq 0).$$

3. Kujutus $^{+}$ on injektiivne, s.t.
$$\forall x, y(x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x^{+} = y^{+} \rightarrow x = y).$$

4. **Induktsiooni printsiip**. Kui $A$ on hulk, mille elemendiks on 0 ja mis koos iga naturaalarvuga sisaldab ka tema järglast, siis hulk $A$ sisaldab kõiki naturaalarve.
$$\forall A((0 \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x^{+} \in A)) \rightarrow \omega \subseteq A).$$

Nende aksioomide abil on võimalik üles ehitada kogu naturaalarvude aritmeetika. Näiteks saab defineerida liitmise, kui ainsa kujutuse $+: \omega \times \omega \rightarrow \omega$, mis rahuldab nõudeid

$$\begin{aligned} x + 0 &= x, \\ x + y^{+} &= (x + y)^{+} \end{aligned}$$

suvalise $x, y \in \omega$ korral.

Predikaadi $<$ (väiksem) saab defineerida järgmiselt:

$$x < y \equiv \exists z(y = x + z) \wedge x \neq y.$$

**Ülesanded.**

1. Tõesta, et naturaalarvude liitmine on kommutatiivne ja assotsiatiivne.

2. Defineeri naturaalarvude korrutamine.

3. Tõesta, et suvaliste naturaalarvude x ja y korral on parajasti üks järgnevatest lausetest tõene.
$$x < y, y < x, x = y.$$

### 2.2.2 Naturaalarvude hulga olemasolu

Peano ajal ei saanud veel tõestada, et leidub kasvõi üks selline kolmik, mis rahuldab Peano aksioome, sest siis ei tuntud veel aksiomaatilist hulgateooriat, ega teatud täpselt, mida tähendab mingi objekti **leidumine** matemaatikas. Käesolevas punktis näitame, et kõigi naturaalarvude hulga olemasolu tuleneb ZF aksioomidest. Selleks näitame, et leidub kolmik, mis rahuldab Peano aksioome. Seni vaadeldud aksioomidest ei järeldu sellise hulga olemasolu. Esitame siin uue, nn. **lõpmatuse aksioomi** ja näitame, et naturaalarvude hulga olemasolu tuleneb otseselt sellest aksioomist. Enne seda aga loome ühtse ettekujutuse nullist ja sellest, mida me mõtleme *järglase* all.

**Definitsioon 2.14** **Nulliks** *nimetatakse tühja hulka* $\emptyset$.

**Definitsioon 2.15** *Hulga* $x$ **järglaseks** $x^+$ *nimetatakse hulka* $x \cup \{x\}$.

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

Võtame kasutusele predikaadi $\mathcal{L}$, mis on defineeritud järgmiselt.

$$\mathcal{L}(Y) \equiv (\emptyset \in Y \wedge \forall x(x \in Y \to x^+ \in Y)).$$

**Aksioom 2.1 (Lõpmatuse aksioom)** *Leidub hulk* $L$*, millel on omadus* $\mathcal{L}$.

$$\exists L(\mathcal{L}(L)).$$

**Teoreem 2.7** *Kui hulga* $A$ *igal elemendil on omadus* $\mathcal{L}$*, siis ka hulgal* $\cap A$ *on omadus* $\mathcal{L}$*, s.t.*

$$\forall a(a \in A \to \mathcal{L}(A)) \Rightarrow \mathcal{L}(\cap A).$$

**Tõestus.** Kõigepealt näitame, et $\emptyset \in \cap A$:

$$\begin{aligned}\forall(a \in A \to \mathcal{L}(a)) &\Rightarrow \forall a(a \in A \to \emptyset \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \emptyset \in \cap A.\end{aligned}$$

Näitame, et hulk $\cap A$ sisaldab koos iga elemendiga $x$ ka selle elemendi järglast $x^+$:

$$\begin{aligned}\forall(a \in A \to \mathcal{L}(a)) &\Rightarrow \forall a(a \in A \to \forall x(x \in a \to x^+ \in a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall a \forall x(a \in A \to (x \in a \to x^+ \in a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall a \forall x((a \in A \wedge x \in a) \to x^+ \in a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall a \forall x((a \in A \to x \in a) \to (a \in A \to x^+ \in a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \forall a(\forall b(b \in A \to x \in b) \to (a \in A \to x^+ \in a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \forall a(x \in \cap A \to (a \in A \to x^+ \in a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x(x \in \cap A \to \forall a(a \in A \to x^+ \in a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x(x \in \cap A \to x^+ \in \cap A).\end{aligned}$$

Järelikult on hulgal $\cap A$ tõepoolest omadus $\mathcal{L}$. Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 2.8** *Leidub parajasti üks hulk $\omega$, mille korral kehtib*

$$\mathcal{L}(\omega) \wedge \forall K(\mathcal{L}(K) \rightarrow \omega \subseteq K). \tag{2.5}$$

**Tõestus.** Vastavalt lõpmatuse aksioomile leidub vähemalt üks hulk $L$, millel on omadus $\mathcal{L}$. Vaatleme hulka $\Phi$, mille elementideks on kõik hulga $L$ sellised osahulgad, millel on omadus $\mathcal{L}$.

$$\Phi = \{S \mid S \subseteq L \wedge \mathcal{L}(S)\}.$$

Näitame, et hulgaks $\omega$ sobib hulk

$$\omega = \cap\Phi = \{x \mid \forall s(s \in \Phi \rightarrow x \in s)\}.$$

Teoreemist 2.7 järeldub, et hulgal $\omega$ on omadus $\mathcal{L}$. Olgu $K$ hulk, millel on omadus $\mathcal{L}$. Tõestame, et hulk $\omega$ on hulga $K$ alamhulk. Teoreemist 2.7 järeldub, et hulgal $K \cap L$ on omadus $\mathcal{L}$. [3] Ja kuna $K \cap L \subseteq L$, siis $K \cap L \in \Phi$. Seega

$$\omega = \cap\Phi \subseteq K \cap L \subseteq K,$$

Järelikult rahuldab hulk $\omega$ nõuet 2.5. Näitame, et $\omega$ on ainus hulk, mis rahuldab nõuet 2.5. Selleks oletame, et ka hulk $M$ rahuldab nõuet 2.5 ning tõestame, et $M = \omega$. Lause

$$\mathcal{L}(M) \wedge \forall K(\mathcal{L}(K) \rightarrow M \subseteq K) \tag{2.6}$$

on eelduse põhjal tõene, millest järeldub, et $M \subseteq \omega$. Kuna hulk $\omega$ rahuldab tingimust 2.5, siis analoogiliselt saame, et $\omega \subseteq M$. Ekstensionaalsuse põhjal $M = \omega$. Teoreem on tõestatud.

Näitame, et hulk $\omega$ rahuldab Peano aksioome.

1. $\emptyset \in \omega$.

2. Lause $\forall x(\emptyset \neq x^+)$ on tõene, sest vastasel korral $x \in \emptyset$, mis on aga väär.

3. Kui $x^+ = y^+$, siis ka $x = y$, sest

   $$x^+ = y^+ \equiv \{x, \{x\}\} = \{y, \{y\}\},$$

   ning kuna $x \neq \{x\}$ ja $y \neq \{y\}$ regulaarsuse tõttu, siis oletades, et $x \neq y$, saame $x = \{y\}$ ja $y = \{x\}$. See on aga vastuolus regulaarsusega. Seega $x = y$.

4. Viimase aksioomi kehtivus järeldub vahetult tingimusest 2.5.

Seega saame samastada hulga $\omega$ kõigi naturaalarvude hulgaga ning võime öelda, et kõigi naturaalarvude hulga olemasolu järeldub hulgateooria aksioomidest. Predikaadile $<$ Peano teoorias vastab siin predikaat $\in$.

**Ülesanne.** Kirjutage välja esimesed 4 naturaalarvu ainult paari ja tühja hulga sümboleid kasutades.

[3] Hulga $\{K, L\}$ kõikidel elementidel on eelduse järgi omadus $\mathcal{L}$, millest järelduvalt ka hulgal $\cap\{K, L\} = K \cap L$ on omadus $\mathcal{L}$.

## 2.3 Üldine otsekorrutis. Järjend. Jada

Olgu $I$ mingi mittetühi hulk ja $\xi\colon I \to B$ mingi funktsioon, mis igale hulga $I$ elemendile $i$ seab vastavusse mingi hulga $\xi(i)$.

**Definitsioon 2.16** *Hulkade $\xi(i)$ otsekorrutiseks nimetatakse hulka*

$$\prod_{i\in I} \xi(i) = \{\psi \mid \psi \in (\cup B)^I \wedge \forall i(i \in I \to \psi(i) \in \xi(i))\}.$$

**Näide.** Olgu antud hulgad:

$$I = \{1,2,3\}, B = \{A, C\}, A = \{a\}, C = \{c, d\}.$$

Olgu meil kujutus $\xi\colon I \to B$, nii et $\xi(1) = A$, $\xi(2) = A$, $\xi(3) = C$, ehk

$$\xi = \{< 1, A >, < 2, A >, < 3, C >\}.$$

Moodustame otsekorrutise ja saame, et

$$\prod_{i\in I} \xi(i) = \{\phi, \psi\},$$

kus

$$\begin{aligned}\phi &= \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, c >\},\\ \psi &= \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >\}.\end{aligned}$$

**Märkus**. Eelpool defineeritud hulkade $A$ ja $B$ otsekorrutis $A \times B$ erineb mõnevõrra üldise otsekorrutise definitsioonist. Siin kasutatud definitsioonis elemendid n.ö. nummerdatakse hulga $I$ elementidega. Kui hulk $I$ on mingi naturaalarv, siis nimetatakse otsekorrutise elemente **järjenditeks** ja kasutatakse tähistust

$$\{< 0, a_0 >, < 1, a_1 >, \dots, < n, a_n >\} = (a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Seega tuleks rangelt võttes eristada ka hulki $< a, b >$ ja $(a, b)$, ehkki järjestud paari *siseehitusel* pole matemaatikas tegelikult mingit tähtsust. Oluline on vaid see, kas kaks järjestatud paari on identsed või ei.

Kui otsekorrutise definitsioonis võtta hulgaks $B$ üheelemendiline hulk $\{A\}$, siis on nõue $\forall i(i \in I \to \psi(i) \in \xi(i)$ triviaalselt täidetud, mistõttu otsekorrutis langeb kokku hulgaga $A^I$.

**Definitsioon 2.17** *Olgu $A$ suvaline hulk. Iga kujutust $\omega \xrightarrow{\psi} A$ nimetatakse* **jadaks** *hulga $A$ elementidest, või ka hulga $A$ elementide jadaks.*

## 2.4 Relatsioonid

### 2.4.1 Relatsiooni mõiste

**Definitsioon 2.18** *Hulga $M \times M$ suvalist osahulka $R$ nimetatakse binaarseks relatsiooniks (ehk. lihtsalt relatsiooniks) hulgal $M$.*

Binaarne relatsioon on vastavuse erijuht.

**Definitsioon 2.19** *Olgu $R$ binaarne relatsioon ja $\langle a,b\rangle \in R$. Oeldakse, et elemendid $a$ ja $b$ on relatsioonis $R$, ning kirjutatakse $a\,R\,b$.*

$$a\,R\,b \equiv \langle a,b\rangle \in R.$$

**Definitsioon 2.20** *Kõikide binaarsete relatsioonide hulka hulgal $M$ tähistatakse $REL(M)$, s.t.*

$$REL(M) = P(M \times M).$$

**Ülesanne**. Näidata, et kui $R$ ja $S$ on binaarsed relatsioonid hulgal $M$, siis ka $R \cup S$, $R \cap S$, $R \backslash S$ on binaarsed relatsioonid hulgal $M$.

### 2.4.2 Tehted relatsioonidega

**Definitsioon 2.21** *Relatsiooni $R \in REL(M)$ täiendiks $\tilde{R}$ nimetatakse relatsiooni, mis koosneb sellistest elementidest $\langle a,b\rangle \in M \times M$, mis ei kuulu relatsiooni $R$.*

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \{\langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in M \times M \wedge \langle a,b\rangle \in R\}.\\ \tilde{R} &= (M \times M)\backslash R.\end{aligned}$$

**Definitsioon 2.22** *Binaarsete relatsioonide $R, S \in REL(M)$ korrutiseks nimetatakse nende relatsioonide kui vastavuste kompositsiooni $R \circ S$.*

Toetudes vastavuste omadustele, võime öelda, et relatsioonide korrutamine on assotsiatiivne, s.t.

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Kerge on näidata, et kui $R, S \in REL(M)$, siis hulk

$$\varphi = \{\langle R,T\rangle \mid R \in REL(M) \wedge T = R \circ S\}$$

on kujutus hulgalt $REL(M)$ hulka $REL(M)$, s.t.

$$\varphi(R) = R \circ S.$$

Kui nüüd $\Re \subseteq REL(M)$, siis kujutuse $\varphi$ abil saab moodustada hulga

$$\bigcup_{r \in \Re} \varphi(r) = \bigcup_{r \in \Re} (r \circ S).$$

See fakt lubab sõnastada järgmise teoreemi.

**Teoreem 2.9** *Kui $S \in REL(M)$ ja $\Re \subseteq REL(M)$ on suvaline binaarsete relatsioonide hulk, siis kehtivad distributiivsuse seadused*

$$(\cup\Re) \circ S = \bigcup_{r\in\Re}(r \circ S),$$
$$S \circ (\cup\Re) = \bigcup_{r\in\Re}(S \circ r).$$

**Tõestus**. Tõestame esimese seose. Teise tõestus on analoogiline.

$$\begin{aligned}
(\cup\Re) \circ S &= \{\langle a,b\rangle \mid \exists c[a\ (\cup\Re)\ c \wedge c\ S\ b]\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists c[\exists r(a\ r\ c \wedge r \in \Re) \wedge c\ S\ b]\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists c \exists r[a\ r\ c \wedge r \in \Re \wedge c\ S\ b]\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists r[\exists c(a\ r\ c \wedge c\ S\ b) \wedge r \in \Re]\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists r[a\ (r \circ S)\ b \wedge r \in \Re]\} = \\
&= \bigcup_{r\in\Re}(r \circ S).
\end{aligned}$$

**Märkus**. Distributiivsuse seadused ei jää kehtima, kui nendes ühendi märk $\cup$ asendada ühisosaga $\cap$.

**Teoreem 2.10** *Kui $R, P, S \in REL(M)$ ja $R \subseteq P$, siis kehtivad seosed*

$$R \circ S \subseteq P \circ S,$$
$$S \circ R \subseteq S \circ P.$$

**Tõestus**. Tõestame esimese lause. Teise tõestus on analoogiline. Lihtne on kontrollida, et sisalduvus ja ühend on seotud järgmiselt:

$$\forall x \forall y(x \subseteq y \leftrightarrow x \cup y = y).$$

Distributiivsuse tõttu

$$P \circ S = (R \cup P) \circ S = (R \circ S) \cup (P \circ S).$$

Seega $R \circ S \subseteq P \circ S$. Teoreem on tõestatud.

### 2.4.3 Pöördrelatsioon

Näitame, et leidub funktsioon $M \times M \xrightarrow{\iota} M \times M$, mis igale järjestatud paarile $z = \langle a,b\rangle$ seab vastavusse järjestatud paari $\langle b,a\rangle$, mida tähistame $z^-$. Hulka $\iota$ saab eraldamise aksioomidele tuginedes defineerida järgmiselt:

$$\iota = \{y \mid y \in M \times M \wedge \exists u \exists v(u \in M \wedge v \in M \wedge y = \langle\langle u,v\rangle, \langle v,u\rangle\rangle)\}.$$

Kerge on veenduda, et kujutus $\iota$ on bijektsioon ja kehtib lause

$$\iota \circ \iota = 1_{M\times M},$$

ehk $\forall z((z^-)^- = z)$.

**Definitsioon 2.23** *Relatsiooni $R \in REL(M)$ pöördrelatsiooniks $R^{-1}$ nimetatakse relatsiooni, mis koosneb parajasti sellistest elementidest $\langle a, b\rangle$, mille korral $\langle b, a\rangle \in R$, s.t.*

$$R^{-1} = \{z \mid z \in M \times M \wedge z^{-} \in R\}.$$

Relatsiooni $R \in REL(M)$ pöördrelatsiooni pöördrelatsioon on relatsioon $R$ ise, s.t.

$$(R^{-1})^{-1} = R. \tag{2.7}$$

tõepoolest, kasutades pöördrelatsiooni definitsiooni

$$\begin{aligned}(R^{-1})^{-1} &= \{z \mid z^{-} \in R\} = \\ &= \{z \mid (z^{-})^{-} \in R\} = \\ &= \{z \mid z \in R\} = \\ &= R.\end{aligned}$$

**Teoreem 2.11** *Kui $R \in REL(M)$ ja $S \in REL(M)$, siis kehtib lause*

$$R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}. \tag{2.8}$$

**Tõestus**. Kasutame sisalduvuse definitsiooni.

$$\begin{aligned}R \subseteq S &\Rightarrow \forall z(z \in R \rightarrow z \in S) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall z(z^{-} \in R^{-1} \rightarrow z^{-} \in S^{-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}.\end{aligned}$$

Viimane järeldus tuleneb sellest, et kujutus $\iota$ on bijektsioon. Teoreem on tõestatud.

On lihtne näidata, et hulk

$$\varphi = \langle R, T\rangle \mid R \in REL(M) \wedge T = R^{-1}$$

on kujutus hulgalt $REL(M)$ hulka $REL(M)$, s.t. $\varphi(R) = R^{-1}$. See fakt lubab sõnastada järgmise teoreemi.

**Teoreem 2.12** *Kui $\Re \subseteq REL(M)$ on suvaline mittetühi binaarsete relatsioonide hulk, siis kõikide binaarsete relatsioonide $r \in \Re$ ühisosa $\cap\Re$ pöördrelatsioon on võrdne nende relatsioonide pöördrelatsioonide ühisosaga, s.t.*

$$(\cap\Re)^{-1} = \bigcap_{r\in\Re} r^{-1}. \tag{2.9}$$

**Tõestus**.

$$\begin{aligned}(\cap R)^{-1} &= \{z \mid z^{-} \in \cap\Re\} = \\ &= \{z \mid \forall r(r \in \Re \rightarrow z^{-} \in r)\} = \\ &= \{z \mid \forall r(r \in \Re \rightarrow z \in r^{-1})\} = \\ &= \bigcap_{r\in\Re} r^{-1}.\end{aligned}$$

**Teoreem 2.13** *Kui $\Re \subseteq REL(M)$ on suvaline binaarsete relatsioonide hulk, siis kõikide binaarsete relatsioonide $r \in \Re$ ühendi pöördrelatsioon on võrdne nende relatsioonide pöördrelatsioonide ühendiga, s.t.*

$$(\cup\Re)^{-1} = \bigcup_{r\in\Re} r^{-1}. \tag{2.10}$$

**Tõestus.**

$$\begin{aligned}
(\cup\Re)^{-1} &= \{z \mid z^{-} \in \cup\Re\} = \\
&= \{z \mid \exists r(z^{-} \in r \wedge r \in \Re)\} = \\
&= \{z \mid \exists r(z \in r^{-} \wedge r \in \Re)\} = \\
&= \bigcup_{r\in\Re} r^{-1}.
\end{aligned}$$

**Teoreem 2.14** *Kui $S \in REL(M)$ ja $T \in REL(M)$, siis nende korrutise pöördrelatsioon on võrdne nende relatsioonide pöördrelatsioonide korrutisega, milles tegurite järjekord on vastupidine.*

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}. \tag{2.11}$$

**Tõestus.**

$$\begin{aligned}
(S \circ T)^{-1} &= \{\langle a,b\rangle \mid b\ (S \circ T)\ a\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists c(b\ S\ c \wedge c\ T\ a)\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists c(c\ S^{-1}\ b \wedge a\ T^{-1}\ c)\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid \exists c(a\ T^{-1}\ c \wedge c\ S^{-1}\ b)\} = \\
&= \{\langle a,b\rangle \mid a\ T^{-1} \circ S^{-1}\ b)\} = \\
&= T^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

### 2.4.4 Ühikrelatsioon ja nullrelatsioon

**Definitsioon 2.24** *Ühikrelatsiooniks hulgal $M$ nimetatakse relatsiooni*

$$E = \{\langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in M \times M \wedge a = b\}.$$

*Ühikrelatsiooni nimetatakse ka diagonaaliks.*

Kerge on veenduda, et ühikrelatsioon $E \in REL(M)$ on iseenese pöördrelatsioon ja suvaline relatsioon $R \in REL(M)$ jääb samaks, kui teda kas vasakult või paremalt korrutada ühikrelatsiooniga, s.t.

$$\begin{aligned}
E^{-1} &= E \\
R \circ E &= E \circ R = R.
\end{aligned}$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} R \circ E &= \{< a, b >|\ \exists c(a\ R\ c \wedge c\ E\ b)\} = \\ &= \{< a, b >|\ \exists c(a\ R\ c \wedge c = b)\} = \\ &= \{< a, b >|\ a\ R\ b\} = \\ &= R. \end{aligned}$$

**Definitsioon 2.25** *Nullrelatsiooniks* 0 *nimetatakse tühja hulka.*

Iga relatsioon $R \in REL(M)$ sisaldab nullrelatsiooni, nullrelatsiooni pöördrelatsioon on nullrelatsioon ja nullrelatsiooni korrutis relatsiooniga $R$ võrdub nullrelatsiooniga, s.t.

$$\begin{aligned} O^{-1} &= O \\ O \circ R &= R \circ O = O. \end{aligned}$$

### 2.4.5 Binaarsete relatsioonide omadused

Järgnevalt vaatleme relatsioonide mõningaid võimalikke omadusi. Rõhutame, et suvaliselt valitud relatsioonil $R$ võivad need omadused olla, kuid ei pea tingimata olema.

- **Refleksiivsus** $\forall x(x\ R\ x)$, ehk
$$E \subseteq R.$$
- **Transitiivsus** $\forall x, y, z(x\ R\ y \wedge y\ R\ z \to x\ R\ z)$, ehk
$$R \circ R \subseteq R.$$
- **Sümmetria** $\forall x, y(x\ R\ y \to y\ R\ x)$, ehk
$$R^{-1} \subseteq R.$$
- **Antisümmetria** $\forall x, y(x\ R\ y \wedge y\ R\ x \to x = y)$, ehk
$$R \cap R^{-1} \subseteq E.$$

Kui binaarsel relatsioonil $R \in REL(M)$ on refleksiivsuse, transitiivsuse, sümmeetria või antisümmeetria omadus, siis ka tema pöördrelatsioonil $R^{-1}$ on see omadus (või need omadused). Kui $\Re$ on mittetühi relatsioonide hulk, mille kõikidel elementidel on mingi ülaltoodud neljast omadusest, siis relatsioonil $\cap\Re$ on seesama omadus. Nende väidete tõestuse jätame lugeja hooleks.

### 2.4.6 Relatsiooni ahend

**Definitsioon 2.26** *Kui $N \subseteq M$ ja $R \in REL(M)$, siis binaarset relatsiooni*

$$R\mid_N = \{<a,b> \mid <a,b> \in N \times N \wedge a\ R\ b\}$$

*nimetatakse relatsiooni $R$ ahendiks alamhulgal $N$.*

Ahendi saab defineerida ka järgmise valemi abil:

$$R\mid_N = R \cap (N \times N).$$

Relatsiooni $R$ ahendi $R\mid_N$ pöördrelatsioon $(R\mid_N)^{-1}$ võrdub relatsiooni $R$ pöördrelatsiooni $R^{-1}$ ahendiga $(R^{-1})_N$, s.t.

$$(R\mid_N)^{-1} = (R^{-1})_N. \tag{2.12}$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned}(R\mid_N)^{-1} &= [R \cup (N \times N)]^{-1} = \\ &= R^{-1} \cup (N \times N)^{-1} = \\ &= R^{-1} \cup (N \times N) = \\ &= (R^{-1})\mid_N .\end{aligned}$$

Kui $\Re \subseteq REL(M)$ on suvaline mittetühi binaarsete relatsioonide hulk ja $N \subseteq M$, siis relatsiooni $\cap\Re$ ahend hulgal $N$ võrdub hulga $\Re$ relatsioonide ahendite ühisosaga, s.t.

$$(\cap\Re)\mid_N = \bigcap_{r\in\Re} r\mid_N . \tag{2.13}$$

Tõepoolest,

$$(\cap\Re)\mid_N = (\cap\Re) \cap (N \times N) = \bigcap_{r\in\Re} r \cap (N \times N) = \bigcap_{r\in\Re} r\mid_N .$$

Kui $\Re \subseteq REL(M)$ on suvaline binaarsete relatsioonide hulk ja $N \subseteq M$, siis relatsiooni $\cup\Re$ ahend hulgal $N$ võrdub hulga $\Re$ relatsioonide ahendite ühendiga, s.t.

$$(\cup\Re)\mid_N = \bigcup_{r\in\Re} r\mid_N . \tag{2.14}$$

Tõepoolest,

$$(\cup\Re)\mid_N = (\cup\Re) \cap (N \times N) = \bigcup_{r\in\Re} [R \cap (N \times N)] = \bigcup_{r\in\Re} r\mid_N .$$

### 2.4.7 Relatsiooni transitiivne sulund

Iga binaarse relatsiooni $R \in REL(M)$ korral leidub selline transitiivne relatsioon $T \in REL(M)$, mis sisaldab relatsiooni $R$, ning mis ise sisaldub suvalises transitiivses relatsioonis $S \in REL(M)$, mille korral $R \subseteq S$. Kirjapildi lühendamiseks võtame kasutusele predikaadi

$$\mathcal{T}(x) \equiv x \in REL(M) \wedge R \subseteq x \wedge x \text{ on transitiivne}$$

**Teoreem 2.15** *Iga relatsiooni $R \in REL(M)$ korral leidub parajasti üks relatsioon $T$, nii et*

$$\mathcal{T}(T) \wedge \forall x(\mathcal{T}(x) \rightarrow T \subseteq x). \tag{2.15}$$

**Tõestus.** Olgu

$$\Phi = \{x \mid x \in REL(M) \wedge \mathcal{T}(x)\}.$$

Võtame

$$T = \cap\Phi.$$

Hulk $\Phi$ pole tühi, sest $M \times M$ on relatsioon omadusega $\mathcal{T}$. Omadus $\mathcal{T}$ säilib ühisosa korral. Seega on hulgal $T = \cap\Phi$ omadus $\mathcal{T}$. Rahuldagu ka hulk $V$ tingimust 2.15. Sellisel juhul on laused $V \subseteq T$ ja $T \subseteq V$ tõesed, millest ekstensionaalsuse põhjal järeldub, et $V = T$. Teoreem on tõestatud.

**Definitsioon 2.27** *Relatsiooni $T$ nimetatakse relatsiooni $R$ transitiivseks sulundiks.*

Nüüd on juba kerge veenduda, et leidub funktsioon $REL(M) \xrightarrow{\tau} REL(M)$, mis igale binaarsele relatsioonile $R \in REL(M)$ seab vastavusse tema transitiivse sulundi $\tau(R)$. Funktsioonil $\tau$ on järgmised omadused:

- $R \subseteq \tau(R)$,
- $R \subseteq S \Rightarrow \tau(R) \subseteq \tau(S)$,
- $\tau \circ \tau = \tau$.

Kui $A$ on hulk ning kujutus

$$P(A) \xrightarrow{\tau} P(A)$$

rahuldab neid kolme tingimust, siis nimetatakse kujutust $\tau$ **sulundioperaatoriks** hulgal $A$. Järelikult on transitiivse sulundi võtmine sulundioperaator.

### 2.4.8 Kõrgema aarsusega relatsioonid. Mudelid. Algebralised struktuurid

**Definitsioon 2.28** *Olgu $M$ suvaline hulk ja $n$ naturaalarv. Hulga $M^n = MAP(n, M)$ suvalist alamhulka nimetatakse $n$-aarseks relatsiooniks hulgal $M$. Naturaalarvu $n$ nimetatakse relatsiooni aarsuseks.*

Näiteks kui $n = 2$, siis ütleme, et tegemist on binaarse relatsiooniga, $n = 3$, siis kasutame nimetust ternaarne relatsioon.

**Definitsioon 2.29** *Olgu $M$ suvaline hulk ja $n$ naturaalarv. Kujutust $M^n \xrightarrow{\phi} M$ nimetatakse $n$-aarseks operatsiooniks hulgal $M$.*

**Definitsioon 2.30** *Mudeliks nimetatakse suvalist paari $\langle M, \Omega \rangle$, kus $\Omega$ elementideks on mingi aarsusega relatsioonid hulgal $M$. Aarsused võivad olla ka erinevad.*

**Definitsioon 2.31** *Algebraliseks struktuuriks, ehk. universaalalgebraks (või lihtsalt algebraks) nimetatakse suvalist paari $\langle M, \Omega \rangle$, kus $\Omega$ elementideks on mingi aarsusega operatsioonid hulgal $M$. Aarsused võivad olla ka erinevad. Hulka $\Omega$ nimetatakse algebra signatuuriks.*

**Näide**. Olgu $N$ kõigi naturaalarvude hulk ja $+$ olgu naturaalarvude liitmine. Siis paar $\langle N, \{+\} \rangle$ on algebraline struktuur.

## 2.5 Ekvivalentsid

### 2.5.1 Ekvivalentsid ja tükeldused

**Definitsioon 2.32** *Binaarset relatsiooni $R \in REL(M)$ nimetatakse ekvivalentsiks, kui ta on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.*

Kõikide ekvivalentside hulka hulgal $M$ tähistatakse $EQ(M)$.

**Definitsioon 2.33** *Hulka $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$, nimetatakse hulga $M$ tükelduseks, kui on täidetud järgmised tingimused:*

- *(T0)* $\emptyset \notin \mathcal{T}$,
- *(T1)* $\cup \mathcal{T} = M$,
- *(T2)* $\forall X, Y \in \mathcal{T} (X = Y \vee X \cap Y = \emptyset)$.

Hulga $\mathcal{T}$ elemente nimetatakse tükkideks. Tingimus (T1) tähendab, et tükid katavad kogu hulga $M$. Tingimus (T2) tähendab, et erinevad tükid ei lõiku.

**Teoreem 2.16** *Kui $\mathcal{T}$ on hulga $M$ tükeldus, siis relatsioon*

$$R_{\mathcal{T}} = \{\langle x, y\rangle \mid \exists A(A \in \mathcal{T} \wedge x \in A \wedge y \in A)\}$$

*on ekvivalentsi hulgal $M$.*

**Tõestus.** Refleksiivsus ja sümmeetria on ilmsed. Tõestame transitiivsuse. Olgu $x, y, z \in M$ ning $< x, y > \in R_{\mathcal{T}}$ ja $< y, z > \in R_{\mathcal{T}}$. Järelikult leiduvad tükid $A, B \in \mathcal{T}$, nii et $x, y \in A$ ja $y, z \in B$, seega $y \in A \cap B$. Järelikult $A \cap B \neq \emptyset$. Tingimusest (T2) saame, et $A = B$. Aksioomist (E.4) järeldub, et $z \in A$, ning kuna $x \in A$, siis järelikult hulga $R_{\mathcal{T}}$ definitsiooni põhjal $< x, z > \in R_{\mathcal{T}}$. Järelikult on relatsioon $R_{\mathcal{T}}$ transitiivne ja on seega ekvivalents.

Olgu $\tau(M)$ hulga $M$ kõikide tükelduste hulk. Eelneva põhjal järeldub, et leidub kujutus $\tau(M) \xrightarrow{\phi} EQ(M)$, mis igale tükeldusele $\mathcal{T} \in \tau(M)$ seab vastavusse ekvivalentsi $R_{\mathcal{T}}$.

**Teoreem 2.17** *Kujutus $\phi$ on injektsioon.*

**Tõestus**. Olgu $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{S}$ tükeldused. Ning olgu $\phi(\mathcal{T}) = \phi(\mathcal{S})$, s.t. $R_{\mathcal{T}} = R_{\mathcal{S}}$. Näitame, et $T \subseteq S$. Lause $S \subseteq T$ tõestus on analoogiline. Olgu $Y \in \mathcal{T}$ suvaline hulga $\mathcal{T}$ element. Näitame, et $Y \in \mathcal{S}$. Olgu $y \in Y$. Kuna $\cup\mathcal{S} = M$ ja $Y \subseteq M$, siis $y \in \cup\mathcal{S}$. Järelikult leidub tükk $Z \in \mathcal{S}$, nii et $y \in Z$. Nüüd näitame, et tükid $Y$ ja $Z$ on identsed. Tõepoolest, ühelt poolt $Y \subseteq Z$, sest

$$\begin{aligned} x \in Y &\Rightarrow < x, y > \in R_{\mathcal{T}} \Rightarrow < x, y > \in R_{\mathcal{S}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists W(W \in \mathcal{S} \wedge x \in W \wedge y \in W) \end{aligned}$$

Kuna $y \in W \cap Z$, siis (T2) põhjal $W = Z$. Järelikult $x \in Z$. Seega $Y \subseteq Z$. Analoogiliselt saame, et $Z \subseteq Y$. Järelikult $Z = Y$. Siit järeldub, et $Y \in \mathcal{S}$. Järelikult $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

**Teoreem 2.18** *Kujutus $\phi$ on sürjektsioon.*

**Tõestus.** Olgu $R \in EQ(M)$ suvaline ekvivalents. Vaatleme kujutust $M \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}(M)$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$x\pi = \{y \mid x \; R \; y\} \tag{2.16}$$

Võtame $\mathcal{T} = \operatorname{Im}\pi$ ja näitame kõigepealt, et $\mathcal{T}$ on tükeldus. Omadus (T0) tuleneb relatsiooni $R$ refleksiivsusest. Tõestame, et (T1) kehtib. Piisab kui näidata, et $M \subseteq \cup\mathcal{T}$. Olgu $x$ hulga $M$ suvaline element. Refleksiivsuse tõttu $x \in x\pi$.

$$\begin{aligned} x \in M &\Rightarrow x \in M \wedge x\pi = x\pi \wedge x \in x\pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(x \in M \wedge A = x\pi \wedge x \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(\exists y(y \in M \wedge A = y\pi) \wedge x \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(A \in \operatorname{Im}\pi \wedge x \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{T} \wedge x \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \cup\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Järelikult tingimus (T1) kehtib. Olgu nüüd $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A = a\pi$ ja $B = b\pi$. Kuna hulk $A \cap B$ pole tühi, siis leidub element $z$, nii et $z \in A$ ja $z \in B$. Järelikult $a\ R\ z$ ja $b\ R\ z$. Näitame, et $A = B$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in a\pi \Rightarrow a\ R\ x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x\ R\ a \Rightarrow x\ R\ a \wedge x\ R\ z \Rightarrow \\ &\Rightarrow x\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z \wedge b\ R\ z \Rightarrow \\ &\Rightarrow x\ R\ z \wedge z\ R\ b \Rightarrow x\ R\ b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b\ R\ x \Rightarrow x \in b\pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Järelikult $A \subseteq B$. Analoogiliselt saame, et $B \subseteq A$, seega $A = B$ ja tingimus (T2) kehtib ja võime öelda, et $\mathcal{T}$ on tükeldus.

Näitame nüüd, et $R = R_{\mathcal{T}}$. Tõepoolest, ühelt poolt

$$\begin{aligned} u\ R\ v &\Rightarrow v \in u\pi \Rightarrow v \in u\pi \wedge u \in u\pi \wedge u \in M \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(u \in M \wedge A = u\pi \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(\exists y(y \in M \wedge A = y\pi) \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(A \in \operatorname{Im}\pi \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u\ R_{\mathcal{T}}\ v, \end{aligned}$$

ja teiselt poolt

$$\begin{aligned} u\ R_{\mathcal{T}}\ v &\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{T} \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(A \in \operatorname{Im}\pi \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A(\exists x(x \in M \wedge A = x\pi) \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists A\exists x(x \in M \wedge A = x\pi \wedge u \in A \wedge v \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x(u \in x\pi \wedge v \in x\pi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x(x\ R\ u \wedge x\ R\ v) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x(u\ R\ x \wedge x\ R\ v) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u\ R\ v. \end{aligned}$$

Järelikult $R = R_{\mathcal{T}}$ ja teoreem on tõestatud.

Tõestatud teoreemidest järeldub, et kujutus $\phi$ on bijektsioon. Seetõttu määrab iga ekvivalents $R \in EQ(M)$ üheselt selle hulga tükelduse $T$ ja vastupidi.

Kui $R$ on hulga $M$ ekvivalents ning $\mathcal{T}$ sellele ekvivalentsile vastav tükeldus, siis hulga $\mathcal{T}$ elemente nimetatakse **ekvivalentsusklassideks** ehk täpsemalt $R$-klassideks. Kujutust $M \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}$ nimetatakse **loomulikuks projektsiooniks**, hulka $\mathcal{T}$ aga **faktorhulgaks** (faktoriks) ekvivalentsi $R$ järgi ning tähistatakse $M/R$. Elemendile $x \in M$ vastavat $R$-klassi $x\pi$ tähistatakse ka $x/R$.

### 2.5.2 Kujutuse tuum

Järgnevalt näitame, et hulga tükeldamine on tihedalt seotud selle hulga kujutustega teistele hulkadele.

**Definitsioon 2.34** *Kui* $M \xrightarrow{\phi} N$ *on kujutus, siis relatsiooni*

$$\mathrm{Ker}\,\phi = \{< x, y >|\ x\phi = y\phi\}$$

*nimetatakse kujutuse* $\phi$ **tuumaks**.

Kerge on veenduda, et $\mathrm{Ker}\,\phi$ on ekvivalents. Tõepoolest, ta on refleksiivne, sest $x\phi = y\phi$, sümmeetriline, sest kui $x\phi = y\phi$, siis $y\phi = x\phi$, ning transitiivne, sest kui $x\phi = y\phi$ ja $y\phi = z\phi$, siis $x\phi = z\phi$. [4]

**Teoreem 2.19** *Kui* $A \xrightarrow{\phi} B$ *ja* $B \xrightarrow{\psi} C$ *on kujutused, ning* $\mathrm{Ker}\,\phi \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$, *siis leidub kujutus* $B \xrightarrow{\xi} C$, *mis teeb järgmise diagrammi kommutatiivseks.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & C \\
B \arrow[ur, "\xi"] & \psi = \phi \circ \xi
\end{tikzcd}$$

*Kui* $\phi$ *on sürjektsioon ja* $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Ker}\,\psi$, *siis on kujutus* $\xi$ *üheselt määratud ja injektiivne.*

**Tõestus.** Kui mõni hulkadest $A$, $B$, $C$ on tühi, siis teoreemi väited on triviaalselt täidetud. Eeldame, et hulgad $A$, $B$, $C$ pole tühjad. Vaatleme esialgu juhtu, kui $\phi$ on sürjektiivne, s.t. $\mathrm{Im}\,\phi = B$. Defineerime vastavuse

$$\xi = \{< b, c >|\ b \in B \wedge c \in C \wedge \exists a(a \in A \wedge a\phi = b \wedge a\psi = c)\}$$

ja näitame esmalt, et $\xi$ on kujutus.

$$\begin{aligned}
b \in B \quad &\Rightarrow \quad b \in B \wedge \exists a(a \in A \wedge a\phi = b) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \exists a(b \in B \wedge a\psi \in C \wedge a \in A \wedge a\phi = b \wedge a\psi = a\psi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \exists c \exists a(b \in B \wedge c \in C \wedge a \in A \wedge a\phi = b \wedge a\psi = c) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \exists c(b \in B \wedge c \in C \wedge \exists a(a \in A \wedge a\phi = b \wedge a\psi = c)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \exists c(< b, c > \in \xi).
\end{aligned}$$

[4]See tuleneb otseselt aksioomidest (E.1), (E.2) ja (E.3)

Näitame, et $\xi$ on ühene vastavus. Kui $< b, c > \in \xi$ ja $< c, d > \in \xi$, siis $\xi$ definitsiooni põhjal leiduvad elemendid $a_1, a_2 \in A$, nii et kehtivad laused

$$a_1\phi = b = a_2\phi, a_1\psi = c, a_2\psi = d.$$

Seega $a_1\phi = a_2\phi$, millest järeldub, et $a_1\psi = a_2\psi$, sest eelduse järgi $\operatorname{Ker}\phi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Järelikult $c = d$. Niisiis, $\xi$ on kujutus, kusjuures $\xi$ definitsioonist tuleneb kergesti võrdus $\psi = \phi \circ \xi$. Tõepoolest, kui $a\psi = c$, siis $< a\phi, a\psi > \in \xi$, s.t. $a(\phi \circ \xi) = a\psi = c$, ning kui $a(\phi \circ \xi) = c$, siis $< a\phi, c > \in \xi$, millest järeldub, et leidub $a' \in A$, nii et $a'\phi = a\phi$ ja $a'\psi = c$. Kuna $\operatorname{Ker}\phi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$, siis järelikult $a'\psi = a\psi$, millest $a\psi = c$.

Kui $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$ ning $b_1\xi = b_2\xi$, siis kujutuse $\phi$ sürjektiivsuse tõttu leiduvad elemendid $a_1, a_2 \in A$, nii et $b_1 = a_1\phi$ ja $b_2 = a_2\phi$. Seega

$$a_1\psi = a_1(\phi \circ \xi) = a_2(\phi \circ \xi) = a_2\psi,$$

s.t. $< a_1, a_2 > \in \operatorname{Ker}\psi$. Kuna $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$, siis

$$b_1 = a_1\phi = a_2\phi = b_2.$$

Seega $\xi$ on injektsioon. Näitame, et $\xi$ on üheselt määratud. Kui leiduvad kaks kujutust $\xi_1$ ja $x_2$, mis teevad ülaltoodud diagrammi kommutatiivseks, siis järelikult $\phi \circ \xi_1 = \phi \circ \xi_2$, millest kujutuse $\phi$ sürjektiivsuse tõttu $\xi_1 = \xi_2$.

Kui $\phi$ pole sürjektiivne, siis vaadeldes hulga $B$ alamhulka $\operatorname{Im}\phi$ võime öelda, et leidub kujutus $\operatorname{Im}\phi \xrightarrow{\xi'} C$, nii et $\phi \circ \xi' = \psi$. Võtame hulgast $C$ suvalise elemendi $c$ ($C$ pole tühi) ja defineerime kujutuse $\xi$ järgmiselt:

$$b\xi = \begin{cases} b\xi' & \text{kui } b \in \operatorname{Im}\phi \\ c & \text{kui } b \notin \operatorname{Im}\phi \end{cases}$$

Selge, et $\phi \circ \xi = \psi$. Teoreem on tõestatud.

**Järeldus.** Suvalise kujutuse $A \xrightarrow{\psi} C$ korral leidub parajasti üks kujutus $A/\operatorname{Ker}\psi \xrightarrow{\xi} C$, nii et $\pi \circ \xi = \psi$, kus $\pi$ on loomulik projektsioon faktorhulgale. Liasks sellele on $\xi$ injektiivne.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & C \\
A/\operatorname{Ker}\psi \arrow[ur, "\xi"] &
\end{tikzcd}$$

## 2.6 Osalised järjestused

### 2.6.1 Osalise järjestuse mõiste

**Definitsioon 2.35** *Relatsiooni $R$ hulgal $M$ nimetatakse osaliseks järjestuseks, kui ta on kas refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne (refleksiivne järjestus); või siis antirefleksiivne* [5] *ja transitiivne (antirefleksiivne järjestus). Kui $R$ on osaline järjestus hulgal $M$, siis öeldakse, et relatsioon $R$ järjestab hulga $M$.*

Selles peatükis mõtleme osaliste järjestuste all refleksiivseid järjestusi.

Kui $R$ on osaline järjestus hulgal $M$, siis öeldakse vahel lihtsalt, et hulk $M$ on osaliselt järjestatud. Seda muidugi juhul, kui eelnevalt on teada, millist relatsiooni me silmas peame. Kui järjestusrelatsioon, millest räägitakse, on eelnevalt teada, siis kasutatakse märki $\leq$ (refleksiivse relatsiooni korral) ja märki $<$ (antirefleksiivse relatsiooni korral). Lauset $a \leq b$ nimetatakse sageli võrratuseks ja öeldakse, et element $a$ eelneb elemendile $b$ või ka $b$ on suurem kui $a$, $a$ on väiksem kui $b$. Hulga $M$ kõigi osaliste järjestuste hulka tähistatakse $ORD(M)$.

**Näited.**

1. Naturaalarvude hulk $N$ relatsiooni $<$ mõttes.
2. Hulga $A$ kmigi alamhulkade hulk $P(A)$ sisalduvusseose mõttes.
3. Jaguvusseos kõigi positiivsete naturaalarvude hulgal. [6]

### 2.6.2 Hasse diagrammid

Olgu $B$ osaliselt järjestatud hulk ja $A$ tema osahulk. Indutseeritud relatsioon $\leq|_A$ on osaline järjestus hulgal $A$.

Kui $a$ ja $b$ on osaliselt järjestatud hulga $A$ elemendid, siis osahulka

$$[a,b] = \{c \mid a \leq c \wedge c \leq b\}$$

nimetatakse lõiguks otspunktidega $a$ ja $b$.

Öeldakse, et element $b$ katab elementi $a$, kui $a \neq b$ ja lõigus $[a,b]$ pole muid elemente peale $a$ ja $b$, s.t. kui kehtib lause

$$a \neq b \wedge [a,b] = \{a,b\}.$$

Katmise mõiste võimaldab meil edaspidi visualiseerida osaliselt järjestatud hulki nn. **Hasse diagrammi** abil, mis kujutab endast järgmistel printsiipidel koostatud joonist:

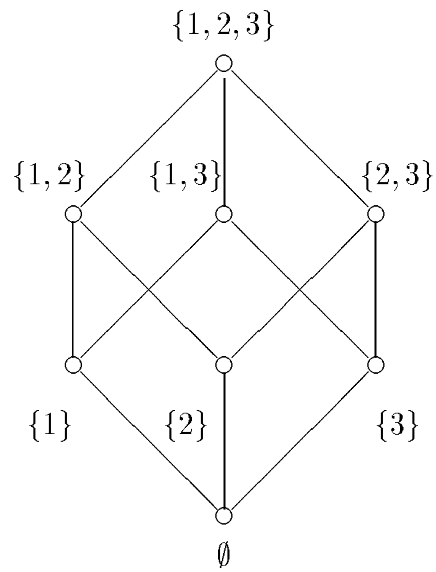
- hulga elemente kujutame ringikestena;
- kui $b$ katab elementi $a$, siis ühendame vastavad ringikesed joonega;

[5] $\forall x \neg x\ R\ x$

[6] $n$ on seotud $m$-ga, kui $m$ jagub $n$-ga.

- Kui $a \leq b$ ja $a \neq b$, siis elemendile $b$ vastav ringike peab olema joonistatud elemendile $a$ vastavast ringikesest kõrgemale.

**Näide**. Olgu $A = \{1, 2, 3\}$ ning joonistame Hasse diagrammi hulgale $\mathcal{P}(A)$, mis on osaliselt järjestatud sisalduvusseose mõttes.




### 2.6.3 Vähim ja minimaalne element

**Definitsioon 2.36** *Osaliselt järjestatud hulga $H$ elementi $v$, mille korral on täidetud tingimus*

$$v \in H \wedge \forall x(x \in H \rightarrow v \leq x),$$

*nimetatakse hulga $H$* **vähimaks** *(esimeseks) elemendiks relatsiooni $\leq$ mõttes.*

**Definitsioon 2.37** *Osaliselt järjestatud hulga $H$ elementi $m$, mille korral on täidetud tingimus*

$$m \in H \wedge \forall x(x \in H \wedge x \leq m \rightarrow x = m),$$

*nimetatakse* **minimaalseks** *elemendiks.*

**Teoreem 2.20** *Kui osaliselt järjestatud hulgas $H$ võib olla ülimalt üks vähim element.*

**Tõestus.** Olgu $v_1$ ja $v_2$ vähimad elemendid. Sellisel juhul on laused

$$\forall x(v_1 \leq x), \forall y(v_2 \leq y)$$

tõesed. Järelikult on tõesed ka laused $v_1 \leq v_2$ ja $v_2 \leq v_1$, millest antisümmeetria tõttu $v_1 = v_2$.

**Definitsioon 2.38** *Elemente, mis katavad vähimat elementi, nimetatakse* **aatomiteks**.

**Näited.**

1. Hulgas $\mathcal{P}(A)$ on aatomiteks kõik üheelemendilised osahulgad. Vähimaks elemendiks on tühi hulk.

2. Hulgas $N\backslash\{0\}$, mis on järjestatud jagamisrelatsiooni abil, on aatomiteks on algarvud, vähimaks elemendiks on arv 1.

### 2.6.4 Duaalsus. Tõkked. Rajad

Osalise järjestuse pöördrelatsioon on samuti osaline järjestus. Pöördrelatsiooni kasutamine võimaldab lihtsalt defineerida nn. duaalseid mõisteid. Kui mingi mõiste definitsioonis asendada osaline järjestus $R$ tema pöördrelatsiooniga, siis saame duaalse mõiste definitsiooni. Näiteks **suurimaks** elemendiks relatsiooni $R$ mõttes nimetatakse vähimat elementi relatsiooni $R^{-1}$ mõttes. Anname järgnevalt "mõiste - duaalne mõiste" paaride loetelu.

| Mõiste | Duaalne mõiste |
|---|---|
| vähim element | suurim element |
| minimaalne element | maksimaalne element |
| aatom | koaatom |
| eelneb | järgneb |
| väiksem | suurem |

Olgu $B$ osaliselt järjestatud hulk ning $A \subseteq B$ mingi osahulk.

**Definitsioon 2.39** *Osahulga $A$* **ülemiseks tõkkeks** *nimetatakse hulga $B$ elementi $t$, mis on suurem kõigist hulga $A$ elementidest. (Duaalne mõiste: alumine tõke)*

**Definitsioon 2.40** *Osahulga $A$* **ülemiseks koonuseks** $A^{\wedge}$ *nimetatakse hulga $A$ kõigi ülemiste tõkete hulka, s.t.*

$$A^{\wedge} = \{x \mid x \in B \wedge \forall y(y \in A \rightarrow y \leq x)\}$$

*Ülemise koonuse duaalne mõiste on* **alumine koonus** $A^{\vee}$.

**Definitsioon 2.41** *Kui hulgas $A^{\wedge}$ leidub vähim element $v$, siis elementi $v$ nimetatakse alamhulga $A$* **ülemiseks rajaks** *ja tähistatakse*

$$v = \sup A.$$

*Duaalselt defineeritakse* **alumine raja**, *mida tähistatakse* $\inf A$.

**Näide.** Osaliselt järjestatud hulgas $\mathcal{P}(A)$ (sisalduvusseose mõttes) on alamhulga $H \subseteq \mathcal{P}(A)$ ülemiseks rajaks $\cup H$ ja alumiseks rajaks $\cap H$.

### 2.6.5 Lineaarsed järjestused

**Definitsioon 2.42** *Osaliselt järjestatud hulga $M$ elemente $a$ ja $b$ nimetatakse* **võrreldavateks**, *kui on tõene lause*

$$a \leq b \vee b \leq a \vee a = b.$$

**Näide.** Kerge on kontrollida, et ka ühikrelatsioon on osaline järjestus. Selle järjestuse mõttes on iga element võrreldav üksnes iseendaga.

**Definitsioon 2.43** *Osalist järjestust $R$ hulgal $M$ nimetatakse* **lineaarseks** *järjestuseks, kui kõik hulga $M$ elemendid on üksteisega võrreldavad. Lineaarselt järjestatud hulka nimetatakse ahelaks.*

**Märkus**. Kõikide hulga $A$ osaliste järjestuste hulk $ORD(A)$ on ise osaliselt järjestatud sisalduvusseose mõttes. Maksimaalseteks elementideks on lineaarsed järjestused (Miks? Kontrollige!).

### 2.6.6 Osaliselt järjestatud hulkade isomorfsus

Olgu hulk $A$ osaliselt järjestatud relatsiooni $R$ mõttes ja hulk $B$ relatsiooni $S$ mõttes.

**Definitsioon 2.44** *Bijektsiooni $A \xrightarrow{\phi} B$ nimetatakse osaliselt järjestatud hulkade* **isomorfismiks**, *kui suvaliste hulga $A$ elementide $a$ ja $b$ korral kehtib lause*

$$a\ R\ b \leftrightarrow a\phi\ S\ b\phi.$$

*Kui leidub isomorfism $A \xrightarrow{\phi} B$, siis ütleme, et osaliselt järjestatud hulgad $A$ ja $B$ on isomorfsed, ning kirjutame $A \cong B$.*

**Definitsioon 2.45** *Bijektsiooni $A \xrightarrow{\phi} B$ nimetatakse* **antiisomorfismiks**, *kui suvaliste hulga $A$ elementide $a$ ja $b$ korral kehtib lause*

$$a\ R\ b \leftrightarrow b\phi\ S\ a\phi$$

*Kui leidub antiisomorfism $A \xrightarrow{\phi} B$, siis öeldakse, et hulgad $A$ ja $B$ on* **antiisomorfsed** *ja kirjutatakse $A \overset{(AI)}{\cong} B$.*

**Definitsioon 2.46** *Öeldakse, et osaliselt järjestatud hulk $A$ ($R$ mõttes) on isomorfselt sisestatav osaliselt järjestatud hulka $B$ ($S$ mõttes), kui $A$ on isomorfne mingi hulga $B$ osahulgaga $C$ (mis on järjestatud relatsiooni $S|_C$ mõttes).*

**Teoreem 2.21** *Iga osaliselt järjestatud hulk $A$ on isomorfselt sisestatav osaliselt järjestatud hulka $\mathcal{P}(A)$ (järjestatud sisalduvusseose mõttes).*

**Tõestus.** Defineerime kujutuse $A \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}(A)$ järgmiselt:

$$a\phi = \{a\}^{\vee}$$

Näitame, et kujutus $\phi$ on isomorfne sisestus. Näitame, et $\phi$ on injektiivne. Kõigepealt paneme tähele, et laused $x \in a\phi$, $x \in \{a\}^{\vee}$ ja $x \leq a$ on samaväärsed. Oletame nüüd, et $a\phi = b\phi$ mingite hulga $A$ elementide $a$ ja $b$ korral.

$$\begin{aligned}
a\phi = b\phi &\Rightarrow \forall x(x \in a\phi \leftrightarrow x \in b\phi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall x(x \leq a \leftrightarrow x \leq b) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall x(x \leq a \leftrightarrow x \leq b) \wedge \forall x(x \leq a \leftrightarrow x \leq b) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a \leq a \leftrightarrow a \leq b) \wedge (b \leq a \leftrightarrow b \leq b)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow \\
&\Rightarrow a = b.
\end{aligned}$$

Järelikult on $\phi$ injektiivne. Kontrollime isomorfismi tingimust.

$$\begin{aligned}
a \leq b &\Rightarrow \forall x(x \leq a \rightarrow x \leq b) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall x(x \in a\phi \rightarrow x \in b\phi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow a\phi \subseteq b\phi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\phi \subseteq b\phi &\Rightarrow \forall x(x \in a\phi \rightarrow x \in b\phi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall x(x \leq a \rightarrow x \leq b) \Rightarrow \\
&\Rightarrow a \leq a \rightarrow a \leq b \Rightarrow \\
&\Rightarrow a \leq b.
\end{aligned}$$

Järelikult on $\phi$ isomorfism. Teoreem on tõestatud.

## 3.1 Valiku aksioom

Olgu $A$ suvaline hulk. Tähistame sümboliga $\mathcal{A}(A)$ hulga $A$ kõigi mittetühjade alamhulkade hulka, s.t.

$$\mathcal{A}(A) = \{x \mid x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \neq \emptyset\}.$$

**Aksioom 3.1 (Valiku aksioom)** *Iga hulga $A$ korral leidub funktsioon $\mathcal{A}(A) \xrightarrow{\varphi} A$, iga mittetühja alamhulga $a$ korral $a\varphi \in a$, s.t.*

$$\forall A \exists \varphi(\varphi \in A^{\mathcal{A}(A)} \wedge \forall a(a \in \mathcal{A}(A) a\varphi \in a)).$$

*Funktsiooni $\varphi$ nimetatakse* **valikufunktsiooniks**.

Funktsioon $\varphi$ nagu valiks hulga $A$ igast mittetühjast alamhulgast välja ühe elemendi - selle hulga esindaja. Kuidas funktsioon $\varphi$ *välja näeb*, seda me ei tea ega saagi teada. Pole selge, milline element konkreetselt mingist hulgast välja valitakse. See aksioom on määrava tähtsusega nn. olemasolu teoreemide tõestamisel, kus väidetakse mingi hulga olemasolu ilma, et me sellest hulgast midagi täpsemalt teaksime. Näiteks matemaatilist analüüsi on raske ette kujutada ilma valiku aksioomita. Kuni käesoleva sajandini kasutasid matemaatikud valiku aksioomi ilma seda endale teadvustamata. Alles XX sajandi algul märgitakse matemaatikute töödes esmakordselt valiku aksioomi kasutamist. Kurt Gödel näitas, et valiku aksioom ei ole vastuolus hulgateooria ülejäänud aksioomidega ja P. Cohen näitas, et valiku aksioomi ei saa tõestada ülejäänud aksioomide abil.

Edaspidi kasutatakse mõnede teoreemide tõestamisel valiku aksioomi. Sellisel juhul kasutame teoreemi numbri järel tähistust (*).

**Teoreem 3.1** (*) *Mittetühjade hulkade otsekorrutis on mittetühi, s.t.*

$$\forall i(i \in I \to i\xi \neq \emptyset) \to \prod_{i \in I} i\xi \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

**Tõestus.** Olgu meil kujutus $I \xrightarrow{\xi} B$, kusjuures

$$\forall i(i \in I \to i\xi \neq \emptyset). \tag{3.2}$$

Valiku aksioomist järelduvalt leidub kujutus $\mathcal{A}(\cup B) \xrightarrow{\varphi} \cup B$, mille korral

$$\forall a(a \in \mathcal{A}(\cup B) \to a\varphi \in a).$$

Kuna kehtib 3.2, siis järelikult

$$\forall i(i \in I \to i\xi \in \mathcal{A}(\cup B)),$$

millest tulenevalt on $\xi \circ \varphi$ kujutus. On kerge veenduda, et

$$\xi \circ \varphi \in \prod_{i \in I} i\xi.$$

Järelikult pole otsekorrutis $\prod_{i \in I} i\xi$ tühi hulk. Teoreem on tõestatud.

Selgub, et teoreem 3.1 on samaväärne valiku aksioomiga, s.t. me võime valiku aksioomi asemel kasutada ka lauselt 3.1. Selleks tuleb näidata, et võttes lause 3.1 aksioomiks, saab tõestada valiku aksioomi.

**Teoreem 3.2** *Lausest 3.1 järeldub valiku aksioom.*

**Tõestus.** Võtame hulgaks $I$ hulga $\mathcal{A}(A)$. Olgu $I = B$ ja vaatleme kujutuse $\xi$ osas samasuskujutust $1_B$. Kujutus $\xi$ rahuldab sellisel juhul tingimust 3.2. Moodustame otsekorrutise $\prod_{i \in I} i\xi$, mis peab lause 3.1 põhjal olema mittetühi hulk. Seega peab leiduma kujutus $I \xrightarrow{\psi} \cup B$, mille korral kehtib lause

$$\forall i(i \in I \to i\psi \in i\xi).$$

Järelikult

$$\exists \psi(\psi \in (\cup\mathcal{A}(A))^{\mathcal{A}(A)} \wedge \forall i(i \in \mathcal{A}(A) \to i\psi \in i)).$$

Kuna aga $\cup\mathcal{A}(A) = A$, siis teoreem on tõestatud.

## 3.2 Minimaalsuse tingimus

### 3.2.1 Rangelt kahanevad jadad

Kui $B$ on osaliselt järjestatud hulk relatsiooni $\leq$ mõttes, mis on refleksiivne, siis on mugav kasutusele võtta teine osaline järjestus $<$, mis on antirefleksiivne ja mis on määratletud järgnevalt:

$$a < b \equiv a \leq b \wedge a \neq b.$$

Nimetame relatsiooni $<$ rangeks võrratuseks. Kui $a < b$, siis ütleme, et element $a$ eelneb rangelt elemendile $b$.

**Definitsioon 3.1** *Jada $\omega \xrightarrow{\phi} B$ nimetatakse rangelt kahanevaks, kui suvalise naturaalarvu $k$ korral element $k^+\phi$ eelneb rangelt elemendile $k\phi$, s.t.*

$$\forall k(k \in \omega \rightarrow k^+\psi < k\psi).$$

*Ütleme, et jada $\phi$ algab elemendist $a$, kui $0\phi = a$.*

Edaspidi on otstarbekas kasutada järgmist lühendit:

$$\Lambda(\phi, B) \equiv \phi \in B^\omega \wedge \forall k(k \in \omega \rightarrow k^+\phi < k\phi).$$

Seda võib lugeda lihtsalt: $\phi$ on hulga $B$ elementide rangelt kahanev jada.

### 3.2.2 Minimaalsuse tingimus

Selles peatükis räägime kolmest tingimusest, mis võivad olla täidetud mingi osaliselt järjestatud hulga korral ja tõestame, et need kolm tingimust on samaväärsed. Nii toimida on kasulik sellel põhjusel, et sageli on konkreetsel juhul lihtne kontrollida vaid ühte nendest kolmest tingimusest.

- **Minimaalsuse tingimus.** Hulga $B$ igas mittetühjes osahulgas $A$ leidub vähemalt üks minimaalne element, s.t.

$$\forall A(A \subseteq B \wedge A \neq \emptyset \rightarrow \exists m(m \in A \wedge \forall x(x \in A \wedge x \leq m \rightarrow x = m)))$$

- **Katkevustingimus.** Ei leidu hulga $B$ elementide rangelt kahanevat jada, s.t.

$$\neg\exists\phi(\Lambda(\phi, B))$$

- **Induktiivsuse tingimus.** Osaliselt järjestatud hulga $B$ kõikidel elementidel on omadus $\mathcal{A}$, kui on täidetud järgmine tingimus: sellest, et omadus $\mathcal{A}$ on kõikidel sellistel elementidel, mis rangelt eelnevad mingile elemendile $a \in M$, järeldub, et omadus $\mathcal{A}$ on ka elemendil $a$ endal, s.t.

$$\forall a[\forall y(y \in B \wedge y < a \rightarrow \mathcal{A}(y)) \rightarrow \mathcal{A}(a) \rightarrow \forall x(x \in B \rightarrow \mathcal{A}(x))] \qquad (3.3)$$

**Märkus.** Kui osaliselt järjestatud hulk $B$ rahuldab mingi omaduse $\mathcal{A}$ korral 3.3 eeldust ning kui hulgas $B$ leidub minimaalne element $m$, siis ka elemendil $m$ on omadus $\mathcal{A}$. Tõepoolest, kui $m$ on minimaalne element, siis lause $y \in B \wedge y < m$ on väär, millest järeldub, et implikatsioon $y \in B \wedge y < a \to \mathcal{A}(y)$ on tõene. Kui 3.3 eeldus kehtib, siis järeldame, et lause $\mathcal{A}(m)$ on tõene.

**Teoreem 3.3** *Minimaalsuse tingimusest järeldub induktiivsuse tingimus.*

*Tõestus.* Olgu $B$ osaliselt järjestatud hulk, mis rahuldab minimaalsuse tingimust. Näitame, et hulk $B$ rahuldab ka induktiivsuse tingimust. Olgu $\mathcal{A}$ mingi selline omadus, et oleks täidetud tingimus

$$\forall a[\forall y(y \in B \wedge y < a \to \mathcal{A}(y)) \to \mathcal{A}(a). \tag{3.4}$$

Olgu $A$ selline hulga $B$ osahulk, mis koosneb parajasti nendest hulga $A$ elementidest, millel ei ole omadust $\mathcal{A}$, s.t.

$$A = \{x \mid x \in B \wedge \neg\mathcal{A}(x)\}$$

Kui $A$ pole tühi, siis peaks hulgas $A$ leiduma minimaalne element $a$. Kõikidel elemendile $a$ rangelt eelnevatel hulga $B$ elementidel on omadus $\mathcal{A}$. Seega on tõene lause

$$\forall y(y \in B \wedge y < a \to \mathcal{A}(y)),$$

millest aga 3.4 põhjal järeldame, et $\mathcal{A}(a)$. Tekkis vastuolu lausega $a \in A$, mistõttu hulk $A$ on tühi. Seega kõikidel hulga $B$ elementidel on omadus $\mathcal{A}$. Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 3.4** *Induktiivsuse tingimusest järeldub katkevustingimus.*

*Tõestus.* Olgu $B$ osaliselt järjestatud hulk, mis rahuldab induktiivsuse tingimust. Defineerime järgmise omaduse:

$$\mathcal{A}(a) \equiv \neg\exists\phi(\Lambda(\phi, B) \wedge 0\phi = a),$$

s.t. elemendil $a$ on omadus $\mathcal{A}$, kui ei leidu elemendiga $a$ algavat hulga $B$ elementide rangelt kahanevat jada. Oletame, et kõikidel mingile elemendile $a$ rangelt eelnevatel elementidel on omadus $\mathcal{A}$. Tõestame, et omadus $\mathcal{A}$ on ka elemendil $a$. Kui $\phi$ oleks elemendiga $a$ algav rangelt kahanev jada, siis funktsioon $\omega \xrightarrow{\nu} B$, mis on defineeritud järgnevalt:

$$x\nu = x^+\phi,$$

oleks rangelt kahanev jada, mis algab elemendiga $0\nu < a$. See on aga vastuolus eeldusega, et kõikidel $a$-le rangelt eelnevatel elementidel on omadus $\mathcal{A}$. Järelikult on ka elemendil $a$ omadus $\mathcal{A}$. Induktiivsuse tingimusest järeldame, et omadus $\mathcal{A}$ on kõikidel hulga $B$ elementidel. Järelikult ei leidu hulga $B$ elementide rangelt kahanevat jada. Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 3.5** (*) *Katkevustingimusest järeldub minimaalsuse tingimus.*

*Tõestus.* Olgu $B$ osaliselt järjestatud hulk, mis rahuldab katkevustingimust. Olgu $A \subseteq B$ selline mittetühi osahulk, milles ei leidu minimaalseid elemente. Näitame, et siis leidub rangelt kahanev jada hulga $A$ elementidest. Defineerime esmalt funktsiooni $A \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}(A)$, nii et

$$a\phi = \{x \mid x \in A \wedge x < a\}.$$

Olgu $\mathcal{A}(A) \xrightarrow{\xi} A$ valikufunktsioon. Siis saame, et hulga $A$ suvalise elemendi $a$ korral $a\phi\xi < a$. Olgu $\nu = \phi \circ \xi$. [1] Olgu $a$ hulga $A$ suvaline element. Näitame, et leidub kujutus $\omega \xrightarrow{\psi} A$, mis täidab järgmist tingimust:

$$0\psi = a \wedge \forall n(n \in \omega \to n^+\psi = n\psi\nu). \tag{3.5}$$

Funktsiooni $\psi$ hakkame konstrueerima järk-järgult tema määramispiirkonda suurendades. Esmalt näitame, et saab koostada kuitahes pikki rangelt kahanevaid järjendeid, mille algusosad kokku langevad. Kõikide nende järjendite ühend ongi otsitav funktsioon $\psi$. Paneme tähele, et hulga $A$ elementide kõik jadad ja järjendid on hulga $\mathcal{P}(\omega \times A)$ elemendid.

Näitame, et iga naturaalarvu $n$ korral leidub parajasti üks funktsioon $n^+ \xrightarrow{\varphi_n} A$, mis täidab tingimust

$$0\varphi_n = a \wedge \forall k(k < n \to k^+\varphi_n = k\varphi_n\nu).$$

Tõepoolest, kui $n = 0$, siis on otsitavaks funktsiooniks $\varphi_0 = \{< 0, a >\}$. Kerge on ka näha, et kui naturaalarvu $n$ korral leidub parajasti üks seda tingimust rahuldav funktsioon, siis see väide kehtib ka $n^+$ korral. Induktsiooni printsiibist [2] tulenevalt kehtib väide kõigi naturaalarvude korral. Niisiis defineerime funktsiooni $\omega \xrightarrow{\mu} \mathcal{P}(\omega \times A)$ järgmiselt:

$$\mu = \{\langle n, \varphi\rangle \mid \langle n, \varphi\rangle \in \omega \times \mathcal{P}(\omega \times A) \wedge 0\varphi = a \wedge \forall k(k < n \to k^+\varphi = k\varphi\nu)\}$$

Kerge on veenduda, et kui $k < n$, siis $\varphi_k \subseteq \varphi_n$. [3] Järelikult võttes

$$\psi = \bigcup_{n \in \omega} n\mu,$$

veendume, et $\psi$ on funktsioon, mis rahuldab nõuet 3.5, ning on rangelt kahanev jada, mis algab elemendiga $a$. Tekkis vastuolu katkevustingimusega. Järelikult kehtib minimaalsuse tingimus. Teoreem on tõestatud.

**Järeldus.** Kui mingi mittetühja osaliselt järjestatud hulga $B$ korral kehtib induktiivsuse tingimus, siis hulgas $B$ leidub vähemalt üks minimaalne element.

[1]Intuitiivselt on selge, et elemendid $a, a\nu, a\nu\nu, ...$ moodustavad rangelt kahaneva jada, kuid jada on hulk ning tema olemasolu on vaja tõestada hulgateooria aksioomide ja mitte sisetunde põhjal.

[2]Siin on mõeldud seda iduktsiooni printsiipi, mis on antud Peano aksioomides. Palun seda mitte segi ajada induktiivsuse tingimusega.

[3]Samuti induktsiooni abil.

### 3.2.3 Täielikult järjestatud hulgad

**Definitsioon 3.2** *Täielikult järjestatud hulgaks nimetatakse ahelat, milles kehtib minimaalsustingimus.*

**Näide.** Kõigi naturaalarvude hulk $\omega$ loomulikus järjestuses.

**Teoreem 3.6** *Täielikult järjestatud hulga iga mittetühi osahulk on samuti täielikult järjestatud.*

*Tõestus.* Olgu $C$ täielikult järjestatud. Kui $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$, siis ka $A \subseteq C$ ning seega leidub hulgas $A$ minimaalne element.

**Teoreem 3.7** *Mittetühjas täielikult järjestatud hulgas $B$ eksisteerib parajasti üks minimaalne element.*

*Tõestus.* Olgu $a, b \in B$ minimaalsed elemendid. Kuna $B$ on lineaarselt järjestatud, siis $a$ ja $b$ peavad olema omavahel võrreldavad. Kui $a \leq b$, siis $a = b$, sest $b$ on minimaalne. Kui $b \leq a$, siis $b = a$, sest $a$ on minimaalne.

**Teoreem 3.8** (*) *Osaliselt järjestatud hulk $B$ rahuldab minimaalsuse tingimust parajasti siis kui igas tema ahelas (lineaarselt järjastatud alamhulk) leidub minimaalne element.*

*Tõestus.* Kui osaliselt järjestatud hulk rahuldab minimaalsuse tingimust, siis ka igas tema ahelas peab leiduma minimaalne element (ahel on alamhulk).

Leidugu hulga $B$ igas ahelas minimaalne element. Näitame, et siis kehtib katkevustingimus. Oletame, et leidub hulga $B$ elementide lõpmatu rangelt kahanev jada $\phi$. Siis oleks $\mathrm{Im}\,\phi$ ahel, milles puudub minimaalne element. See on eeldusega vastuolus. Järelikult katkevustingimus kehtib. Kui aga kehtib katkevustingimus, siis kehtib ka minimaalsuse tingimus.

## 3.3 Ordinaalid

### 3.3.1 Ordinaali mõiste

**Definitsioon 3.3** *Ütleme, et predikaat $\in$ järjestab hulga $A$ täielikult, kui relatsioon*

$$\{< x, y > | < x, y > \in A \times A \wedge x \in y\}$$

*on täielik järjestus.*

[4]

[4]Siin mõeldakse loomulikult antirefleksiivset järjestust

**Definitsioon 3.4** *Hulka $X$ nimetatakse* **ordinaaliks**, *kui kehtivad tingimused:*

- *(O.1) $\in$ järjestab hulga $X$ täielikult;*
- *(O.2) Suvaliste hulga $X$ elementide $a$ ja $b$ korral kehtib lause*

$$a \in b \wedge b \in X \to a \in X.$$

**Teoreem 3.9** *$\emptyset$ on ordinaal.*

*Tõestus.* Triviaalne.

**Teoreem 3.10** *$\omega$ on ordinaal.*

*Tõestus.* Eelnevast on teada, et $\in$ järjestab hulga $\omega$ lineaarselt. Näitame, et järjestus on täielik. Olgu $A \subseteq \omega$ mittetühi hulk. Näitame, et selles leidub minimaalne element. Tõepoolest, regulaarsuse tõttu leidub hulgas $A$ element $y$, nii et $A \cap y = \emptyset$, s.t. kui $x \in A$, siis $x \notin y$. Järelikult on $y$ hulga $A$ minimaalne element. Seega naturaalarvude loomulik järjestus on täielik.

Nüüd näitame, et ka tingimus (O.2) kehtib. Olgu $a \in b$ ja $b \in \omega$. Näitame induktsiooni abil $b$ järgi, et $a \in \omega$. Kõigepealt märgime, et kehtib implikatsioon

$$a \in \emptyset \wedge \emptyset \in \omega \to a \in \omega.$$

Oletame, et mingi $x$ korral kehtib lause

$$a \in x \wedge x \in \omega \to a \in \omega, \tag{3.6}$$

ning näitame, et see lause kehtib ka $x^+$ korral. Olgu $a \in x^+ = x \cup \{x\}$ ja $x^+ \in \omega$. Järelikult kas $a = x$ või $a \in x$. Kui $a = x$, siis $a \in \omega$, sest $x \in \omega$. [5] Kui $a \in x$, siis 3.6 põhjal $a \in \omega$. Teoreem on tõestatud.

**Märkus.** Kõiki ordinaale püüame edaspidi tähistada kreeka tähtedega $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ... Võtame edaspidi kasutusele lühendi $\mathsf{Or}(\alpha)$, mis tähistagu lauset: $\alpha$ on ordinaal. Sageli kasutame ka kirjapildi "$\forall\alpha(\mathsf{Or}(\alpha) \to ...$" asemel lihtsalt kirjapilti "$\forall\alpha(...$".

### 3.3.2 Ordinaalide omadused

**Teoreem 3.11** *Kui $\alpha$ on ordinaal, siis ka $\alpha^+$ on ordinaal.*

[5] Kui $x^+ \in \omega$, siis ka $x \in \omega$ Peano aksioomide põhjal.

*Tõestus.* Näitame, et $\in$ järjestab hulga $\alpha^+$ täielikult. Antirefleksiivsus järeldub regulaarsuse aksioomist. Transitiivsus järeldub omaduse (O.1) kehtimisest $\alpha$ korral. Lineaarsus tuleneb järgnevast:

$$\begin{aligned}
x \in \alpha^+ \wedge y \in \alpha^+ &\Rightarrow (x \in \alpha \vee y \in \alpha) \wedge (y \in \alpha \vee y = \alpha) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in \alpha \wedge y \in \alpha) \vee (x \in \alpha \wedge y = \alpha) \vee \\
&\phantom{\Rightarrow} (x = \alpha \wedge y \in \alpha) \vee (x = \alpha \wedge y = \alpha) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in y \vee y \in x \vee x = y) \vee y \in x \vee x \in y \vee x = y \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in y \vee y \in x \vee x = y.
\end{aligned}$$

Minimaalsuse tingimus. $\alpha$ on definitsiooni järgi hulga $\alpha^+$ suurimaks elemendiks. Kui $A \subseteq \alpha^+$ ja $\alpha \notin A$, siis $A \subseteq \alpha$ ja temas leidub minimaalne element, sest $\alpha$ on ordinaal. Kui $\alpha \in A$, siis $A = \{\alpha\} \cup (A \setminus \{\alpha\})$. Kui $A = \{\alpha\}$, siis $\alpha$ on minimaalne element. Kui $A \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$, siis $A \setminus \{\alpha\}$ on hulga $\alpha$ mittetühi osahulk, milles eelduse põhjal leidub minimaalne element.

Tõestame tingimuse (O.2).

$$\begin{aligned}
x \in y \wedge y \in \alpha^+ &\Rightarrow x \in y \wedge (y \in \alpha \vee y = \alpha) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in y \wedge y \in \alpha) \vee (x \in y \wedge y = \alpha) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \alpha \vee x \in \alpha \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \alpha \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \alpha \vee x = \alpha \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \alpha^+.
\end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 3.12** *Kui $\alpha$ on ordinaal ja $b \in \alpha$, siis ka $b$ on ordinaal.*

*Tõestus.* Kuna $\alpha$ korral kehtib tingimus (O.2), siis on järelikult tõene lause $\forall x(x \in b \rightarrow x \in \alpha)$, millest järeldub, et $b \subseteq \alpha$. Kuna $\alpha$ on täielikult järjestatud ja $b$ on tema alamhulk, siis ka $b$ on täielikult järjestatud. Tingimus (O.2) kehib $b$ korral, sest $\alpha$ korral kehtib transitiivsus.

**Teoreem 3.13** *Kui $\alpha$ ja $\beta$ on ordinaalid, siis kehtib lause*

$$\alpha \subset \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$$

*Tõestus.* Kui $\alpha \in \beta$, siis $\alpha \subseteq \beta$ (eelmine teoreem) ja $\alpha \neq \beta$ regulaarsuse tõttu. Seega $\alpha \subset \beta$.

Kui $\alpha \subset \beta$, siis vaatleme hulka

$$\beta \setminus \alpha = \{x \mid x \in \beta \wedge x \notin \alpha\},$$

mis pole tühi, sest $\alpha \subseteq \beta$ ja $\alpha \neq \beta$. Kuna $\beta \backslash \alpha \subseteq \beta$, siis hulgas $\beta \backslash \alpha$ leidub minimaalne element $g$.

Näitame, et $g = \alpha$. Olgu $\delta$ hulga $g$ suvaline element. Kuna $\delta \in g$, siis $\delta \notin \beta \backslash \alpha$ Teiselt poolt, kuna $\beta$ on ordinaal ning $\delta \in g \in \beta$, siis $\delta \in \beta$. Seega $\delta \in \alpha$. Seega $g \subseteq \alpha$.

Tõestame vastupidise sisalduvuse. Olgu $\delta$ hulga $\alpha$ suvaline element. Kuna $\alpha \subset \beta$, siis $\delta \in \beta$. Kuna $\beta$ on ordinaal, siis ka $\delta$ on ordinaal. Samuti on $g$ ordinaal, sest $g \in \beta$. Järelikult üks lausetest

$$\delta \in g, g \in \delta, \delta = g$$

on tõene. Lause $g \in \delta$ pole tõene, sest siis $g \in \alpha$ ($\delta \in \alpha$), mis on vastuolus lausega $g \in \beta \backslash \alpha$. Samal põhjusel ei saa olla tõene lause $\delta = g$. Järelikult lause $\delta \in g$ on tõene. Seega $\alpha \subseteq g$. Järelikult $\alpha = g$, millest tulenevalt $\alpha \in \beta$. Teoreem on tõestatud.

### 3.3.3 Kõigi ordinaalide klass

**Teoreem 3.14** *Predikaat $\in$ järjestab kõik ordinaalid lineaarselt.* [6]

*Tõestus.* Antirefleksiivsus ja transitiivsus on ilmsed. Tõestame lineaarsuse. Olgu $\alpha$ ja $\beta$ kaks erinevat ordinaali. Järelikult üks hulkadest $\alpha \backslash \beta$ või $\beta \backslash \alpha$ pole tühi. Oletame, et $\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$ ja $g$ on hulga $\beta \backslash \alpha$ minimaalne element. Kui $\delta \in g$, siis ühelt poolt $\delta \notin \beta \backslash \alpha$ ja teiselt poolt $\delta \in \beta$, sest $\delta \in g \in \beta$. Seega $\delta \in \alpha$, millest järeldame, et $g \subseteq \alpha$. Teoreemi 3.13 põhjal järelikult kas $g = \alpha$ või siis $g \in \alpha$. Lause $g \in \alpha$ on aga vastuolus lausega $g \in \beta \backslash \alpha$. Järelikult $g = \alpha$. Seega $\alpha \in \beta$. Kui eeldaksime, et hulk $\alpha \backslash \beta$ pole tühi, saaksime, et $\beta \in \alpha$. Järelikult on suvalise kahe ordinaali $\alpha, \beta$ korral tõene lause

$$\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \vee \alpha = \beta,$$

mis tähendabki, et $\in$ järjestab kõik ordinaalid lineaarselt.

**Teoreem 3.15** *Predikaat $\in$ järjestab kõik ordinaalid täielikult.*

*Tõestus.* Olgu $A$ mingi mittetühi ordinaalide hulk. Regulaarsuse põhjal leidub ordinaal $\alpha \in A$, nii et

$$\alpha \cap A = \emptyset.$$

Näitame, et $\alpha$ on hulga $A$ minimaalne element.

$$\begin{aligned} \alpha \cap A = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \forall x (x \notin \alpha \cap A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \forall x \neg (x \in \alpha \wedge x \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \forall x (x \in A \to x \notin \alpha) \end{aligned}$$

[6] Võib ka öelda, et kõigi ordinaalide klass on järjestatud $\in$ mõttes. Ehkki siin pole tegemist järjestuse kui hulgaga.

Viimane lause tähendabki, et $\alpha$ on hulga $A$ minimaalne element. Järelikult suvalises mittetühjas ordinaalide hulgas leidub minimaalne element.

**Teoreem 3.16** *Kui $A$ on mingi ordinaalide hulk, siis $\cup A$ on ordinaal.*

*Tõestus.* Ühendi definitsiooni põhjal

$$\cup A = \{\alpha \mid \exists \beta(\alpha \in \beta \wedge \beta \in A).$$

Kuna $\cup A$ on ordinaalide hulk, siis pole vaja enam näidata, et tingimus (O.1) kehtib. Tõestame tingimuse (O.2).

$$\begin{aligned} \alpha \in \beta \wedge \beta \in \cup A &\Rightarrow \alpha \in \beta \wedge \exists g(\beta \in g \wedge g \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists g(\alpha \in \beta \wedge (\beta \in g \wedge g \in A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists g((\alpha \in \beta \wedge \beta \in g) \wedge g \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists g(\alpha \in g \wedge g \in A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha \in \cup A. \end{aligned}$$

Järelikult on $\cup A$ ordinaal.

**Teoreem 3.17** *Pole olemas suurimat ordinaali (ordinaali, mis sisaldaks elementidena kõik ülejäänud ordinaalid).*

*Tõestus.* Kui $\alpha$ oleks suurim ordinaal, siis $\alpha^+$ oleks samuti ordinaal. Järelikult $\alpha^+ \in \alpha$ ning teisest küljest $\alpha \in \alpha^+$. Seega $\alpha \in \alpha^+ \in \alpha$, millest järeldub, et $\alpha \in \alpha$. Vastuolu regulaarsusega.

**Teoreem 3.18** *Pole olemas kõikide ordinaalide hulka.*

*Tõestus.* Kui $A$ oleks kõikide ordinaalide hulk, siis $\cup A$ oleks suurim ordinaal, mida aga pole olemas.

### 3.3.4 Transfiniitne induktsioon

**Definitsioon 3.5** *Öeldakse, et $\alpha$ on* **järgordinaal***, kui leidub $\beta$, nii et $\alpha = \beta^+$. Kui ordinaal $\alpha \neq \emptyset$ pole järgordinaal, siis öeldakse, et $\alpha$ on* **piirordinaal***.*

**Teoreem 3.19** *$\omega$ on vähim piirordinaal.*

*Tõestus.* Kui $n \in \omega$, siis $n$ on naturaalarv. Järelikult kas $n = \emptyset$ või siis leidub $m$, nii et $n = m^+$.

**Teoreem 3.20 (Transfiniitse induktsiooni printsiip)** *Olgu $\mathcal{A}(x)$ mingi lause, milles vaid muutuja $x$ sisaldub vabalt, siis*

$$\forall\beta[\mathsf{Or}(\beta) \to [\forall\alpha(\alpha \in \beta \to \mathcal{A}(\alpha)) \to \mathcal{A}(\beta)]] \to \forall\gamma(\mathsf{Or}(\gamma) \to \mathcal{A}(\gamma))$$

*Tõestus.* Oletame, et $\mathcal{A}$ on selline lause, et iga ordinaali $\beta$ korral kehtib

$$\forall\alpha(\alpha \in \beta \to \mathcal{A}(\alpha)) \to \mathcal{A}(\beta) \tag{3.7}$$

Oletame, et leidub ordinaal $\gamma$, millel pole omadust $\mathcal{A}$. Defineerime hulga

$$H = \{\alpha \mid \alpha \in \gamma \wedge \neg\mathcal{A}(\alpha)\} \cup \{\gamma\},$$

mis pole tühi, sest $\gamma \in H$. Kuna $H$ on mittetühi ordinaalide hulk, siis temas leidub minimaalne element $\beta$. Kõikidel ordinaalist $\beta$ väiksematel ordinaalidel on omadus $\mathcal{A}$. Seega lause 3.7 põhjal on ordinaalil $\beta$ omadus $\mathcal{A}$. Tekkis vastuolu lausega $\beta \in H$. Järelikult ei leidu sellist ordinaali $\gamma$, millel pole omadust $\mathcal{A}$. Seega on igal ordinaalil omadus $\mathcal{A}$.

### 3.3.5 Induktiivsed definitsioonid

Toome kõigepealt ära hulgateooria viimased aksioomid, millest pole enne juttu olnud.

**Aksioom 3.2 (Asenduse aksioomid)** *Kui $\mathcal{A}(x,y)$ on kahekohaline predikaat* [7] *ning kehtib lause*

$$\forall x\forall y\forall z(\mathcal{A}(x,y) \wedge \mathcal{A}(x,z) \to y = z), \tag{3.8}$$

*siis suvalise hulga $A$ korral leidub hulk*

$$B = \{y \mid \exists x(x \in A \wedge A(x,y))\}.$$

**Teoreem 3.21 (Induktiivne defineerimine)** *Kui $A$ on mingi hulk, ning $\mathcal{A}(x,y)$ on kahekohaline predikaat, nii et kehtib ühesuse tingimus 3.8, siis iga ordinaali $\beta$ korral leidub parajasti üks funktsioon $f_\beta$, nii et iga $\gamma \leq \beta$ korral ja iga $z$ korral kehtib lause*

$$< \gamma, z >\in f_\beta \leftrightarrow \mathcal{A}(\{f_\beta(\delta) \mid \delta < \gamma\}, z). \tag{3.9}$$

*Tõestus.* Näitame kõigepealt, et rohkem kui üks ei saa sellise omadusega funktsioone olla (mingi kindla $\beta$ korral). Olgu $f_\beta$ ja $g_\beta$ funktsioonid, mis rahuldavad tingimust 3.9, ning oletame, et väide kehtib $\beta$-st väiksemate ordinaalide korral. Järelikult saavad $f_\beta$ ja $g_\beta$ erineda üksnes kohal $\beta$, sest kui $\alpha < \beta$, siis funktsioonid

[7] S.t. lauses $\mathcal{A}$ esineb vabalt vaid kaks muutujat.

$f_\beta\mid_\alpha$ ja $g_\beta\mid_\alpha$ rahuldavad samuti tingimust 3.9 ja langevad seega kokku. Kuna aga $\mathcal{A}$ puhul kehtib ühesuse tingimus, siis ei saa funktsioonid $f_\beta$ ja $g_\beta$ erineda ka kohal $\beta$. [8] Niisiis, $f_\beta = g_\beta$.

Läheme nüüd olemasolu tõestamise juurde. Olgu $\beta$ mingi ordinaal ning oletame, et selliste omadustega funktsioon leidub iga ordinaali $\alpha < \beta$ korral. Olgu meil kahekohaline predikaat

$$\mathcal{B}(\alpha, f) \equiv \mathsf{Or}(\alpha) \wedge \exists t(f \in t^{\alpha^+}) \wedge \forall\gamma\forall z(<\gamma, z> \in f \leftrightarrow \mathcal{A}(\{f(\delta) \mid \delta < \gamma\}, z)),$$

mis täidab ühesuse tingimust. See tuleneb eelnevast. Aksioomidest 3.2 järeldub, et leidub hulk

$$F = \{f \mid \exists\alpha(\alpha < \beta \wedge \mathcal{B}(\alpha, f))\}$$

Kerge on veenduda, et $\cup F$ on samuti funktsioon, kusjuures iga $\alpha < \beta$ korral $(\cup F)(\alpha) = f_\alpha(\alpha)$.

Kui leidub $z$, nii et $\mathcal{A}(\{f_\alpha(\alpha) \mid \alpha < \beta\}, z)$, siis võtame $f_\beta = (\cup F) \cup \{<\beta, z>\}$. Kui sellist $z$-i ei leidu, siis võtame $f_\beta = \cup F$. Lihtne on veenduda, et $f_\beta$ rahuldab nõuet 3.9.

Nüüd järeldame transfiniitse induktsiooni põhjal, et selline funktsioon leidub iga ordinaali $\beta$ korral. Teoreem on tõestatud.

### 3.3.6 Järjestustüübid

Selles jaotises kavatseme näidata, et iga täielikult [9] järjestatud hulk on isomorfne mingi ordinaaliga (järjestatud $\in$ mõttes). Kuidas hulki täielikult järjestada, me siin ei vaatle.

**Definitsioon 3.6** *Öeldakse, et täielikult järjestatud hulgal $B$ mõttes on järjestustüüpi $\alpha$, kui $\alpha$ on ordinaal ja kui leidub bijektsioon $\alpha \xrightarrow{\phi} B$, mis säilitab järjestuse, s.t. suvaliste ordinaalide $\gamma, \beta \in \alpha$ korral*

$$\beta \in \gamma \rightarrow \beta\phi < \gamma\phi.$$

**Märkus**. Võib ka öelda, et $B$ on isomorfne ordinaaliga $\alpha$, sest iga täielik järjestus on lineaarne ning lineaarsed järjestused on teatavasti hulga $ORD(B)$ maksimaalsed elemendid. Seetõttu pole vastupidist implikatsiooni vaja enam tõestada.

**Teoreem 3.22** *Igal täielikult järjestatud hulgal on üheselt määratud järjestustüüp.*

*Tõestus*. Olgu hulk $B$ täielikult järjestatud. Olgu meil järgmine kahekohaline predikaat:

$$\mathcal{F}(X, y) \equiv y \text{ on hulga } B\backslash X \text{ minimaalne element},$$

[8] Kui nad üldas on sellel kohal määratud.

[9] Siin ja edaspidi peame silmas üksnes antirefleksiivseid järjestusi.

mis loomulikult täidab ühesuse nõuet. Kasutame nüüd teoreemi induktiivsest defineerimisest ja saame, et iga ordinaali $\beta$ korral leidub funktsioon $f_\beta$, nii et iga $\alpha \leq \beta$ korral

$$< \alpha, z > \in f_\beta \leftrightarrow z = \min B \backslash \{f_\beta(\gamma) \mid \gamma < \beta\}, \qquad (3.10)$$

kus min tähendab minimaalset elementi. Funktsioon $f_\beta$ on injektiivne, sest

$$\begin{aligned} \alpha \in \gamma \quad &\Rightarrow \quad f_\beta(\alpha) \in \{f_\delta(\beta) \mid \delta \in \alpha\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad f_\beta(\alpha) \notin B \backslash \{f_\beta(\delta) \mid \delta \in \alpha\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad f_\beta(\alpha) \neq f_\beta(\gamma). \end{aligned}$$

Funktsioon $f_\beta$ on järjestust säilitav, sest

$$\alpha \in \gamma \Rightarrow \{f_\beta(\delta) \mid \delta \in \alpha\} \subseteq \{f_\beta(\delta) \mid \delta \in \gamma\} \Rightarrow f_\beta(\alpha) < f_\beta(\gamma).$$

Minimaalsuse tingimusest järeldub, et kui hulk $B \backslash \{f_\beta(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ pole tühi, siis temas leidub minimaalne element. Seega kui $f_\beta$ on määratud kohal $\alpha$ [10] ja $\gamma \in \alpha$, siis $f_\beta$ on määratud ka kohal $\gamma$. Väidame, et leidub vähemalt üks selline ordinaal $\alpha$, mille korral $B \backslash \{f_\beta(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\} = \emptyset$. Tõepoolest, võtame lause: $\mathcal{G}(b, \beta) \equiv$ leidub funktsioon $f_\beta$, mis täidab nõuet 3.10, mis on määratud kohal $\beta$ ja $f_\beta(\beta) = b$. See lause täidab ühesuse tingimust. Seega leidub ordinaalide hulk

$$D = \{\beta \mid \exists b(b \in B \wedge \mathcal{G}(b, \beta))\}.$$

Kuna kõigi ordinaalide hulka pole olemas, siis leidub vähemalt üks ordinaal $\alpha \notin D$, millest järeldubki, et $B \backslash \{f_\alpha(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\} = \emptyset$. Olgu $\delta$ vähim selline ordinaal, mille korral $B \backslash \{f_\delta(\gamma) \mid \gamma \in \delta\} = \emptyset$. Siis $\delta \xrightarrow{f_\delta} B$ ongi otsitav isomorfism. Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 3.23** *Kui kujutus* $X \xrightarrow{f} \beta$ *on bijektsioon ja* $\beta$ *on ordinaal, siis leidub hulga* $X$ *täielik järjestus järjestustüübiga* $\beta$.

*Tõestus.* Defineerime järjestuse $<$ järgmiselt

$$a < b \equiv f(a) \in f(b)$$

Ordinaali definitsioonist tulenevalt on $<$ antirefleksiivne, transitiivne ja lineaarne. Olgu $X \supseteq Y \neq \emptyset$. Defineerime hulga

$$H = \{f(y) \mid y \in Y\},$$

[10] S.t. $\exists z(< \alpha, z > \in f)$

milles peab leiduma minimaalne element $\alpha$. Hulga $H$ definitsioonist tulenevalt leidub element $a \in Y$, nii et $f(a) = \alpha$. Element $a$ on hulga $Y$ minimaalne element, sest

$$\begin{aligned} x < a \quad &\Rightarrow \quad f(x) \in f(a) \Rightarrow f(x) \in \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad f(x) \notin H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \notin Y. \end{aligned}$$

Niisiis, $<$ on täielik järjestus. Kuna $f$ on bijektsioon, siis leidub teine bijektsioon $\beta \xrightarrow{g} X$, nii et

$$f \circ g = 1_X \wedge g \circ f = 1_\beta.$$

Kujutus $g$ säilitab samuti järjestuse ja seega ordinaal $\beta$ on antud täieliku järjestuse $<$ järjestustüüp. Teoreem on tõestatud.

# 3.4 Kardinaalid

## 3.4.1 Zermelo teoreem. Zorni lemma

Käesolevas peatükis toome ära veel kaks valiku aksioomi ekvivalenti, mis mängivad tähtsat rolli paljudes matemaatikaharudes. Nendeks on Zermelo teoreem ja Zorni lemma.

**Teoreem 3.24 (* Zermelo teoreem)** *Iga hulk on täielikult järjestatav.*

*Tõestus.* Olgu meil hulk $X$. Näitame, et leidub vähemalt üks hulga $X$ täielik järjestus. Olgu $\mathcal{A}(A) \xrightarrow{\psi} A$ valikufunktsioon. Olgu meil kahekohailne predikaat

$$\mathcal{F}(A, x) \equiv \psi(X \backslash A) = x,$$

mis loomulikult täidab ühesuse nõuet. Eelnevast teame, et iga ordinaali $\alpha$ korral leidub parajasti üks funktsioon $g$, mis iga ordinaali $\beta \in \alpha$ ja iga $z$ korral rahuldab tingimust

$$\forall z (< \beta, z > \in g \leftrightarrow \mathcal{F}(\{g(\gamma) \mid \gamma \in \beta\}, z))$$

Kerge on veenduda, et $g$ on injektiivne (iga $\alpha$ korral). Funktsiooni $g$ väärtuste hulgaks hulga $X$ mingi osahulk $A$. Kui $A \neq X$, siis pole hulk $X \backslash A$ tühi, mistõttu võime öelda, et leidub sama tingimust rahuldav funktsioon $g'$ ka ordinaali $\alpha^+$ korral, kusjuures $g'$ on määratud kohal $\alpha^+$. Järelikult leidub ordinaal $\gamma$, nii et ükski ülaltoodud tingimust rahuldav funktsioon $g$ pole määratud ei $\gamma$ korral ega ühegi $\gamma$-st suurema ordinaali korral. Vastasel korral õnnestuks konstrueerida kõigi ordinaalide hulk, mida aga pole olemas. Seega leidub minimaalne ordinaal $\delta \leq \gamma$, mille korral ükski ülaltoodud tingimust rahuldav funktsioon $g$ pole määratud.

Funktsiooni $g$ määramispiirkonnaks on ordinaal. Seega leidub ülaltoodud tingimust rahuldav funktsioon $g$, mille määramispiirkonnaks on ordinaal $\delta$. Funktsioon $\delta \xrightarrow{g} X$ on sürjektsioon, sest muidu oleks $g$ määratud ka kohal $\delta$ (hulk $X \backslash A$ poleks tühi). Seega $g$ on bijektsioon, mis aga tähendab, et hulgal $X$ leidub täielik järjestus tüübiga $\delta$.

**Teoreem 3.25 (* Zorni lemma)** . *Kui hulk $P \neq \emptyset$ on osaliselt järjestatud relatsiooni $<$ mõttes, nii et iga ahel $C \subseteq P$ on ülalt tõkestatud, siis iga $p \in P$ korral leidub maksimaalne element $m \in P$, nii et $p < m$ või $p = m$.*

*Tõestus.* Tõestuses kasutatakse Zermelo teoreemi. Valiku aksioomi ennast ei kasutata. Olgu $<<$ hulga $P$ täielik järjestus, mille olemasolu järeldub Zermelo teoreemist. Võtame kasutusele predikaadi

$$\mathcal{F}(A, x) \equiv x \text{ on hulga } A^{\wedge} \text{ minimaalne element } << \text{ mõttes,}$$

mis on loomulikult ühene.

Olgu $p \in P$. Leidub parajasti üks funktsioon $g$, nii et iga ordinaali $\alpha$ korral kehtiksid tingimused:

- $< \emptyset, p > \in g$,
- $\forall \alpha \forall z (< \alpha, z > \in g \leftrightarrow \mathcal{F}(\{g(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}, z))$

Funktsioon $g$ säilitab järjestuse, sest

$$\alpha \in \beta \rightarrow g(\alpha) < g(\beta).$$

Tänu sellele on funktsiooni $g$ väärtuste hulk $R$ täielikult järjestatud, mistõttu ta on ahel. Samuti järeldub siit, et $g$ on üksühene. Funktsiooni $g$ määramispiirkonnaks on mingi ordinaal $\delta$.

Näitame, et $\delta$ on järgordinaal. Kui $\delta$ oleks piirordinaal, siis hulgas $R$ ei oleks maksimaalset elementi. See tähendaks, et hulgal $R$ leidub ülemine tõke väljaspool hulka $R$ (iga ahel on ülalt tõkestatud). Hulk $R^{\wedge}$ pole seega tühi, mistõttu temas leidub minimaalne element relatsiooni $<<$ mõttes ning funktsioon $g$ oleks seega määratud kohal $\delta$. Seega kuuluks ordinaal $\delta$ funktsiooni $g$ määramispiirkonda, s.t. $\delta \in \delta$, mis on aga regulaarsuse aksioomiga vastuolus. Oleme sunnitud tõdema, et $\delta$ on järgordinaal.

Järelikult leidub ordinaal $\beta$, nii et $\delta = \beta^+$ Veendume, et $m = g(\beta)$ ongi otsitav maksimaalne element. Tõepoolest, kui $m$ poleks maksimaalne element, siis leiduks element $z$, nii et $m < z$, mistõttu funktsioon $g$ oleks määratud ka kohal $\delta = \beta^+$, millest aga saaksime $\delta \in \delta$. Järelikult on $m$ maksimaalne element, kusjuures $p < m$.

**Teoreem 3.26** *Zorni lemmast järeldub valiku aksioom.*

*Tõestus.* Olgu meil suvaline hulk $X$, nii et $\emptyset \notin X$. Püüame konstrueerida valikufunktsiooni $X \xrightarrow{\phi} \cup X$, nii et

$$\forall x(x \in X \rightarrow \phi(x) \in x) \tag{3.11}$$

Defineerime hulga $P$ järgnevalt:

$$P = \{f \mid \exists D(D \subseteq X \wedge f \in (\cup X)^D \wedge \forall x(x \in D \rightarrow f(x) \in x))\}$$

Hulk $P$ koosneb nn. osalistest valikufunktsioonidest. Defineerime hulgal $P$ osalise järjestuse $<$ järgmiselt:

$$f < g \equiv f \subset g.$$

Iga ahel $C \subseteq P$ on ülalt tõkestatud, sest funktsioon $\cup C \in D$, milles on kerge veenduda. Zorni lemmast järeldub, et hulgas $P$ leidub vähemalt üks maksimaalne element.

Hulga $P$ maksimaalseteks elementideks on täielikud valikufunktsioonid. Tõepoolest, olgu $\phi$ hulga $P$ maksimaalne element. Oletame, et leidub $x \in X$, mis ei kuulu funktsiooni $\phi$ määramispiirkonda. Kuna $x \neq \emptyset$, siis leidub vähemalt üks element element $y \in x$. Järelikult leidub funktsioon

$$g = \phi \cup \{< x, y >\}.$$

Järelikult $g \in P$ ja $\phi < g$, mis on aga vastuolus eeldusega, et $\phi$ on hulga $P$ maksimaalne element. Seega $\phi$ rahuldab nõuet 3.11.

Olgu $A$ suvaline hulk ja $\mathcal{A}(A)$ tema kõigi mittetühjade alamhulkade hulk. Kuna $\cup\mathcal{A}(A) = A$, siis eelneva põhjal järeldame, et leidub funktsioon $\mathcal{A}(A) \xrightarrow{\xi} A$, nii et iga $a \in \mathcal{A}(A)$ korral $a\phi \in a$. Teoreem on tõestatud.

### 3.4.2 Hulkade võrdlemine

Võtame kasutusele järgmised lauselühendid:

$$\begin{aligned}
\|A\| = \|B\| &\equiv \text{Leidub bijektsioon } A \longrightarrow B \\
\|A\| \leq \|B\| &\equiv \text{Leidub injektsioon } A \longrightarrow B \\
\|A\| < \|B\| &\equiv \|A\| \leq \|B\| \wedge \neg(\|B\| \leq \|A\|)
\end{aligned}$$

**Teoreem 3.27** *Kui $A \neq \emptyset$ ja leidub injektsioon $A \longrightarrow B$, siis leidub sürjektsioon $B \longrightarrow A$.* [11]

[11] Tingimus $A \neq \emptyset$ on siin oluline, sest kui võtta $A = \emptyset$ ja $B = \{\emptyset\}$, siis võib öelda, et tühi hulk ise on injektsioon hulgast $A$ hulka $B$, kuid kerge on näha, et ei leidu ühtegi kujutust hulgast $B$ hulka $A$.

*Tõestus.* Olgu $A \xrightarrow{\phi} B$ injektsioon ja $A \neq \emptyset$. Seega hulgas $A$ leidub vähemalt üks element $a$. Defineerime kujutuse $B \xrightarrow{\psi} A$ järgmiselt:

$$b\psi = \begin{cases} b\phi^{-1}, & \text{kui } b \in \operatorname{Im}\phi \\ a, & \text{kui } b \notin \operatorname{Im}\phi \end{cases}$$

Selge, et $\psi$ on sürjektsioon.

**Teoreem 3.28** (*) *Kui leidub sürjektsioon $B \longrightarrow A$, siis leidub ka injektsioon $A \longrightarrow B$.*

*Tõestus.* Olgu $B \xrightarrow{\psi} A$ sürjektsioon. Siis leidub parajasti üks kujutus $\chi$, mis teeb diagrammi

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\
B/\operatorname{Ker}\psi \arrow[ur, "\chi"] &
\end{tikzcd}$$

kommutatiivseks, kusjuures $\chi$ on injektsioon. Kuna $\psi$ on sürjektiivne, siis $\chi$ on bijektsioon, mistõttu leidub pöördkujutus $\chi^{-1}$. Olgu $\mathcal{A}(B) \xrightarrow{\xi} B$ valikufunktsioon. Teame, et faktorhulk $B/\operatorname{Ker}\psi$ koosneb hulga $B$ mittetühjadest alamhulkadest. Võtame nüüd $\phi = \chi^{-1} \circ \xi$. Kerge on veenduda, et $A \xrightarrow{\phi} B$ on injektsioon.

**Teoreem 3.29 (Cantor)** *Iga hulga $A$ korral $\|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$.*

*Tõestus.* Ilmselt $\|A\| \leq \|\mathcal{P}(A)\|$, sest kujutus, mis hulga $A$ igale elemendile $a$ seab vastavusse ühe-elemendilise alamhulga $\{a\}$, on injektiivne.

Näitame nüüd, et ei leidu sürjektsiooni $A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, millest eelmise teoreemi põhjal järeldub, et ei leidu ka injektsiooni $\mathcal{P}(A) \longrightarrow A$, s.t. $\neg(\|\mathcal{P}(A)\| \leq \|A\|)$. Tõepoolest, kui $A \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}(A)$ oleks sürjektsioon, siis hulgal

$$H = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\phi\}$$

leiduma originaal $h \in A$, s.t. $h\phi = H$. Jõuame vastuoluni, kui küsime, kas $h \in H$. Tõepoolest, kui $h \in H$, siis hulga $H$ definitsioonist tulenevalt $h \notin h\phi = H$, ja kui $h \notin H$, siis $h \in H$. Teoreem on tõestatud.

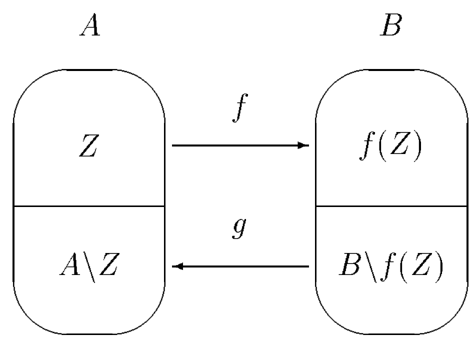
**Teoreem 3.30 (Cantor,Schröder,Bernstein)** *Kui $\|A\| \leq \|B\|$ ja $\|B\| \leq \|A\|$, siis $\|A\| = \|B\|$.*

*Tõestus.* Olgu $A \xrightarrow{f} B$ ja $B \xrightarrow{g} A$ injektsioonid. Järgnrvalt püüame teha hulga $A$ niiviisi pooleks $A = Z \cup A \backslash Z$, et

$$g(B \backslash f(Z)) = A \backslash Z,$$

ning defineerime siis kujutuse $A \xrightarrow{\phi} B$ järgmiselt:

$$\phi = f\mid_Z \cup g^{-1}\mid_{A \backslash Z} .$$




Selge, et $\phi$ on bijektsioon. Kogu raskus seisneb seega hulga $A$ õiges poolitamises. Kuidas me teame, et selline poolitus üldse võimalik on?

Kõigepealt defineerime kujutuse $\mathcal{P}(A) \xrightarrow{H} \mathcal{P}(A)$ järgmiselt:

$$H(X) = A \backslash g(B \backslash f(X)).$$

Ütleme, et hulk $X \in \mathcal{P}(A)$ on **kasvav**, kui $X \subseteq H(X)$. Olgu $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ kõikide kasvavate hulkade hulk.

**Lemma 1** *Kui $\mathcal{B}$ on kasvavate hulkade mittetühi hulk, siis $\cup\mathcal{B}$ on samuti kasvav hulk.*

*Tõestus.*

$$\begin{aligned}
H(\cup\mathcal{B}) &= A \backslash g(B \backslash f(\cup\mathcal{B})) = A \backslash g(B \backslash f(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} b)) = \\
&= A \backslash g(B \backslash \bigcup_{b \in \mathcal{B}} f(b)) = A \backslash g(\bigcap_{b \in \mathcal{B}} (B \backslash f(b))) = \\
&= A \backslash \bigcap_{b \in \mathcal{B}} g(B \backslash f(b)) = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} A \backslash g(B \backslash f(b)) = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} H(b) \supseteq \\
&\supseteq \bigcup_{b \in \mathcal{B}} b = \cup\mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Lemma on tõestatud.

Kuna tühi hulk on kasvav, siis järelikult $\mathcal{I}$ pole tühi, mistõttu leidub ka suurim kasvav hulk $\cup\mathcal{I}$.

**Lemma 2** *Funktsioon $H$ on monotoone, s.t. ta säilitab sisalduvuse.*

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} X \subseteq Y \quad &\Rightarrow \quad f(X) \subseteq f(Y) \Rightarrow B \backslash f(Y) \subseteq B \backslash f(X) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad g(B \backslash f(Y)) \subseteq g(B \backslash f(X)) \Rightarrow A \backslash g(B \backslash f(X)) \subseteq A \backslash g(B \backslash f(Y)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad H(X) \subseteq H(Y). \end{aligned}$$

**Lemma 3** *Funktsioon $\mathcal{P}(A) \xrightarrow{H} \mathcal{P}(A)$ kujutab kasvavad hulgad kasvavateks.*

*Tõestus.* Kui $Z$ on kasvav, siis $Z \subseteq H(Z)$, millest monotoonsuse tõttu $H(Z) \subseteq H(H(Z))$. Seega $H(Z)$ on kasvav.

Nüüd poolitame hulga $A$, võttes $Z = \cup\mathcal{I}$, s.t. $Z$ on suurim kasvav hulk. Järelikult $Z = H(Z)$, sest $H$ kujutab kasvavad hulgad kasvavateks, mistõttu $H(Z)$ on kasvav, ja kuna $Z$ on suurim kasvav hulk, siis $Z = H(Z)$, s.t.

$$\begin{aligned} A \backslash g(B \backslash f(Z)) &= Z, \text{ja seega} \\ g(B \backslash f(Z)) &= A \backslash Z. \end{aligned}$$

Sobiv poolitus ongi leitud. Teoreem on tõestatud.

### 3.4.3 Lõplikkus

Toome kõigepealt sellise lõplikkuse definitsiooni, mis vast kõige enam vastab meie intuitiivsetele arusaamadele.

**Definitsioon 3.7** *Hulka $A$ nimetatakse* **klassikaliselt lõplikuks**, *kui leidub naturaalarv $n$ ja bijektsioon $\phi: n \to A$. Hulka, mis pole klassikaliselt lõplik, nimetatakse* **lõpmatuks**.

**Definitsioon 3.8** *Hulka $A$ nimetatakse* **lõplikuks Dedekindi järgi**, *kui iga injektsioon $\varphi: A \to A$ on sürjektsioon (seega bijektsioon). Hulka, mis pole lõplik Dedekindi järgi, nimetatakse* **lõpmatuks Dedekindi järgi**.

Selge, et iga naturaalarv $n \in \omega$ on klassikaliselt lõplik ning naturaalarvude hulk $\omega$ on lõpmatu, sest leidub mittesürjektiivne injektsioon $n \mapsto n^+$.

**Teoreem 3.31** *Kõik naturaalarvud on lõplikud Dedekindi järgi.*

*Tõestus.* Olgu $K$ kõigi selliste naturaalarvude hulk, mis on lõplikud Dedekindi järgi. Selge, et $\emptyset \in K$. Tõestame, et kui $x \in K$, siis ka $x^+ \in K$. Olgu $x \in K$ ja olgu

$$x \cup \{x\} \xrightarrow{\phi} x \cup \{x\}$$

injektsioon. Olgu $x \cup \{x\} \xrightarrow{\chi} x \cup \{x\}$ bijektsioon, mis nö. vahetab ära elemendid $x$ ja $\phi(x)$ ning jätab kõik ülejäänud elemendid paigale. Kujutus $\phi \circ \chi$ on järelikult injektsioon, mis teisendab elemendi $x$ elemendiks $x$. Järelikult on kujutus $\phi \circ \chi\mid_x$ injektsioon hulgast $x$ hulka $x$ ja kuna $x \in K$, siis järelikult on see kujutus sürjektsioon. Järelikult on ka kujutus $\phi \circ \chi$ sürjektsioon. Kuna $\chi$ on bijektsioon, siis on järelikult ka $\phi$ sürjektsioon. Järelikult $x^+ \in K$. Siit järeldame, et $K = N$. Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 3.32** *Kui hulk $A$ on klassikaliselt lõplik, siis ta on lõplik Dedekindi järgi.*

*Tõestus.* Olgu $A$ klassikaliselt lõplik. Näitame, et $A$ on lõplik Dedekindi järgi. Eelduse kohaselt leidub bijektsioon $\phi\colon n \to A$, kus $n$ on mingi naturaalarv. Olgu $\psi\colon A \to A$ injektsioon. Jääb üle näidata, et $\psi$ on sürjektsioon. See tuleneb faktist, et kujutus

$$\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}\colon n \longrightarrow n$$

on injektsioon ning sellest, et naturaalarvud on lõplikud Dedekindi järgi.

**Teoreem 3.33** *Kui $A$ on lõplik Dedekindi järgi, siis ei leidu injektsiooni $\omega \longrightarrow A$.*

*Tõestus.* Oletame, et injektsioon $\omega \xrightarrow{\phi} A$ leidub. Olgu $\omega \xrightarrow{\sigma} \omega$ kujutus, mis igale naturaalarvule $n$ seab vastavusse tema järglase $n^+$. Siis ka $\sigma \circ \phi$ on injektsioon, mistõttu $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}(\sigma \circ \phi)$ ja leidub injektsioon $\psi'$, mis teeb järgmise diagrammi kommutatiivseks

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"'] & \operatorname{Im}\phi \arrow[d, "\psi'"] \\
\omega \arrow[r, "\phi"] & \operatorname{Im}\phi
\end{tikzcd}$$

Kujutus $\psi'$ on injektsioon, kuid pole sürjektsioon, sest

$$0\phi \notin \operatorname{Im}(\sigma \circ \phi) = \operatorname{Im}(\phi \circ \psi') = \operatorname{Im}\psi'.$$

Injektsiooni $\psi'$ saab aga jätkata injektsioonini $A \xrightarrow{\psi} A$ järgmiselt:

$$x\psi = \begin{cases} x\psi' & \text{kui } x \in \operatorname{Im}\phi \\ x & \text{kui } x \notin \operatorname{Im}\phi \end{cases}$$

Kujutus $\phi$ on injektsioon, kuid pole sürjektsioon. See on aga vastuolus eeldusega, et $A$ on lõplik Dedekindi järgi.

**Teoreem 3.34** (*) *Kui ei leidu injektsiooni $\omega \longrightarrow A$, siis $A$ on lõplik.*

*Tõestus.* Vastavalt Zermelo teoreemile leidub ordinaal $\alpha$ ja bijektsioon $\alpha \xrightarrow{\phi} A$. Kui $\omega \leq \alpha$, siis $\phi\mid_\omega$ oleks injektsioon, mille olemasolu me aga eelduses välistasime. Seega $\alpha < \omega$, s.t. $\alpha$ on naturaalarv.

Sellest tõestusest tõuseb selgelt esile valiku aksioomi osa lõplikkuse defineerimisel. Selgub, et ilma valiku aksioomita hulgateoorias võib defineerida terve hierarhia erinevaid lõplikkuse mõisteid, mis omavahel ei kattu.

### 3.4.4 Kardinaali mõiste

**Definitsioon 3.9** *Ordinaali $\alpha$ nimetatakse* **kardinaaliks**, *kui*

$$\forall\beta(\beta < \alpha \rightarrow \|\beta\| < \|\alpha\|).$$

**Teoreem 3.35** *Kui $A$ on mittetühi kardinaalide hulk, siis $\cup A$ on kardinaal.*

*Tõestus.* Teoreemi 3.16 põhjal teame, et $\cup A$ on ordinaal. Olgu $\beta < \cup A$. Järelikult leidub selline kardinaal $k \in A$, nii et $\beta \in k$, seega $\|\beta\| < \|k\|$. Kuna $k \subseteq \cup A$, siis $\|k\| \leq \|\cup A\|$ (sobivaks injektsiooniks $k \longrightarrow \cup A$ on samasuskujutus $1_k$). Kuna $\|\beta\| < \|k\|$, siis leidub ka injektsioon $\beta \longrightarrow \cup A$, s.t. $\|\beta\| \leq \|\cup A\|$. Kui leiduks injektsioon $\cup A \xrightarrow{\phi} \beta$, siis ka $\phi\mid_k$ oleks injektsioon hulgast $k$ hulka $\beta$, mis on aga vastuolus lausega $\|\beta\| < \|k\|$. Järelikult $\|\beta\| < \|\cup A\|$, s.t. $\cup A$ on kardinaal.

**Teoreem 3.36** *Kõik naturaalarvud on kardinaalid.*

*Tõestus.* Kui $n \in \omega$ ja $m < n$, siis leidub injektsioon $m \longrightarrow n$, milleks on samasuskujutus $1_m$, s.t. $\|m\| \leq \|n\|$, kui leiduks injektsioon $n \xrightarrow{\phi} m$, siis $\phi$ oleks ühtlasi ka mittesürjektiivne injektsioon $n \longrightarrow n$, mis on vastuolus faktiga, et kõik naturaalarvud on lõplikud Dedekindi järgi. Järelikult $\|m\| < \|n\|$ ja $n$ on kardinaal.

**Teoreem 3.37** *Kõigi naturaalarvude hulk $\omega$ on kardinaal.*

*Tõestus.* Teoreemist 3.36 järeldub, et $\omega$ on kardinaalide hulk, mistõttu $\omega = \cup\omega$ on kardinaal.

**Teoreem 3.38** *$\omega^+$ ei ole kardinaal.*

*Tõestus.* Selge, et $\omega < \omega^+$, kuid $\|\omega\| = \|\omega^+\|$, sest kujutus $\omega^+ \xrightarrow{\phi} \omega$, kus

$$k\phi = \begin{cases} k^+ & \text{kui } k < \omega \\ 0 & \text{kui } k = \omega \end{cases}$$

on bijektsioon. Seega $\neg(\|\omega\| < \|\omega^+\|)$, millest järeldubki, et $\omega^+$ pole kardinaal.

**Teoreem 3.39 (Hartdog)** *Pole olemas suurimat kardinaali.*

*Tõestus.* Olgu $k$ lõpmatu kardinaal. [12] Olgu $\mathcal{J}$ hulga $k$ kõikide täielike järjestuste hulk, s.t.

$$\mathcal{J} = \{\rho \mid \rho \in \mathcal{P}(k \times k) \wedge \ \rho \text{ on täielik järjestus hulgal } k \ \}.$$

Olgu meil kahekohaline predikaat

$$\mathcal{A}(\rho, \beta) \equiv \ \rho \in \mathcal{J} \text{ ja } \rho \text{ järjestustüüp on } \beta,$$

mis täidab ühesuse nõuet, sest iga täilikult järjestatud hulga järjestustüüp on üheselt määratud. Asenduse aksioomidest järeldub, et leidub hulk

$$J = \{\beta \mid \exists \rho(\rho \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{A}(\rho, \beta))\},$$

mis koosneb hulga $k$ kõikvõimalikest järjestustüüpidest. Hulk $\gamma = \cup J$ on ordinaal teoreemi 3.16 tõttu. Näitame, et $\gamma$ on kardinaal, mis on rangelt suurem kardinaalist $k$.

Olgu $\alpha < \gamma$. Näitame, et $\|\alpha\| < \|\gamma\|$. Oletame, et $\|\alpha\| = \|\gamma\|$. Kuna $\alpha \in \gamma = \cup J$, siis leidub $\beta$, nii et $\alpha \in \beta$ ja $\beta \in J$. Kuna $\alpha \in \beta$, siis $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Kuna $\beta \in J$, siis $\beta \leq \cup J = \gamma$, s.t. igal juhul $\|\beta\| \leq \|\gamma\|$. Teisalt $\|\gamma\| \leq \|\alpha\| \leq \|\beta\|$, millest järeldub, et $\|\gamma\| \leq \|\beta\|$. Nüüd järeldame Cantor-Schröder-Bernsteini teoreemist, et $\|\gamma\| = \|\beta\|$.

Seega leidub bijektsioon $\gamma \xrightarrow{\phi} \beta$. Kuna $\beta \in J$, siis hulga $J$ definitsioonist tulenevalt leidub hulga $k$ täielik järjestus tüübiga $\beta$, s.t. leidub bijektsioon $\beta \xrightarrow{\psi} k$. Kuid sellisel juhul on $\gamma \xrightarrow{\phi\psi} k$ bijektsioon, millest järeldub, et $\gamma \in J$. Näitame, et $\gamma^+ \in J$. Tõepoolest, kuna eelduse põhjal $\omega \leq k$, siis defineerides bijektsiooni $\gamma^+ \xrightarrow{\chi} k$ järgmiselt:

$$\alpha\chi = \begin{cases} \alpha^+(\phi \circ \psi) & \text{kui } \alpha < \omega \\ \alpha(\phi \circ \psi) & \text{kui } \omega \leq \alpha < \gamma \\ 0(\phi \circ \psi) & \text{kui } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Saamegi, et $\gamma^+ \in J$, s.t. $\gamma^+ \subseteq \cup J = \gamma$, millest järeldub $\gamma \in \gamma$. Tekkis vastuolu regulaarsuse aksioomiga. Järelikult $\neg(\|\alpha\| = \|\gamma\|)$. Kuna aga $\|\alpha\| \leq \|\gamma\|$, siis Cantor-Scröder-Bernsteini teoreemi põhjal $\neg(\|\gamma\| \leq \|\alpha\|)$. Niisiis, $\|\alpha\| < \|\gamma\|$ ning $\gamma$ on kardinaal.

Teame, et $k \leq \gamma$, sest $k \in J$. Kui $k = \gamma$, siis $\gamma \in J$, millest analoogiliselt eelenvaga järeldub, et $\gamma \in \gamma$. Niisiis, $\gamma$ on kardinaal, mis on rangelt suurem kui $k$. Kardinaal $k$ valiti suvaliselt ning seega pole suurimat kardinaali olemas.

[12] Kuna $\omega$ on kardinaal, siis suurim kardinaal peab olema tingimata lõpmatu.

Lõpmatuid kardinaale tähistatakse heebrea tähega $\aleph$ (*alef*). Tähistagu $k^*$ kardinaalile $k$ vahetult järgnevat kardinaali. Igale ordinaalile $\alpha$ saab vastavusse seada ühe lõpmatu kardinaali $\aleph_\alpha$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega \\ \aleph_{\gamma^+} &= \aleph_\gamma^* \\ \aleph_\lambda &= \cup\{\aleph_\beta \mid \beta < \gamma\}, \end{aligned}$$

kus $\lambda$ on piirordinaal.

### 3.4.5 Hulga võimsus

**Definitsioon 3.10** *Hulga $A$* **võimsuseks** $\|A\|$ *nimetatkse kardinaali $k$, mille korral $\|k\| = \|A\|$.*

Valiku aksioomist järeldub, et igal hulgal on vähemalt üks võimsus. Teiselt poolt, kui $k_1$ ja $k_2$ on hulga $A$ võimsused, siis $\|k_1\| = \|k_2\|$. Seega $k_1 = k_2$, sest lause $k_1 < k_2$ on vastuolus kardinaali definitsiooniga. Niisiis, igal hulgal on ülimalt üks võimsus. Iga kardinaal $k$ on loomulikult identne oma võimsusega $\|k\|$.

Igal ordinaalil on võimsus, sest hulgas [13]

$$\mathcal{J} = \{\alpha \mid \text{ Leidub hulga } \beta \text{ täielik järjestus tüübiga } \alpha\ \}$$

leidub minimaalne element $k$, mis ongi otsitav kardinaal. Tõepoolest, kui $\gamma < k$, siis $\gamma \notin \mathcal{J}$, millest järeldub, et ei leidu bijektsiooni $\gamma \longrightarrow \beta$. Järelikult ei leidu bijektsiooni $\gamma \longrightarrow k$, millest järeldub, et $\|\gamma\| < \|k\|$, s.t. $k$ on kardinaal.

**Definitsioon 3.11** *Hulka $A$ nimetatakse* **loenduvaks**, *kui $\|A\| \leq \|\omega\|$.*

**Definitsioon 3.12** *Kardinaali $\|\mathcal{P}(\omega)\|$ nimetatakse* **kontiinumi võimsuseks**. *Öeldakse, et hulk $A$ on kontiinumi võimsusega, kui $\|A\| = \|\mathcal{P}(\omega)\|$.*

Tuleb rõhutada, et ilma valiku aksioomita hulgateoorias ei saa me sugugi kindlad olla, kas kontiinumi võimsus üldse eksisteerib, s.t. kas hulka $\mathcal{P}(\omega)$ saab täielikult järjestada. Kui kontiinumi võimsus eksisteerib, siis kuidas ta paikneb lõpmatute kardinaalide hierarhias? Kas ta on $\aleph_1$, $\aleph_2$ või hoopis $\aleph_7$? Selgub, et sellele küsimusele ei saa hulgateooria (isegi koos valiku aksioomiga) põhimõtteliselt vastata.

[13] Saab näidata, et see on hulk.

### 3.4.6 Kokkuvõtteks

Näitasime, kuidas saab mõõta hulkade "suurusi". Näitasime sisuliselt, et kõikide hulkade klass $\mathcal{S}$ jaguneb ekvivalentsusklassideks, kuhu kuuluvad võrdse võimsusega hulgad., s.t. hulgad $x$ ja $y$ on samas klassis, kui $\|x\| = \|y\|$. Defineerisime hulga võimsuse mõiste ja näitasime, et kui hulka $x$ saab täielikult järjestada, siis hulga $x$ ekvivalentsusklassis leidub vähemalt üks kardinaal $k$, mis ongi hulga $x$ võimsus.

Kui kasutame valiku aksioomiga hulgateooriat, siis kehtib selles ka Zermelo teoreem, mistõttu iga hulka saab täielikult järjestada, ning seega leidub igal hulgal võimsus. Niisiis, igas ekvivalentsusklassis leidub parajasti üks kardinaal. Samuti täheldasime, et ühes ekvivalentsusklassis sisalduvad ordinaalid moodustavad hulga, kusjuures selle hulga minimaalne element ongi selles klassis sisalduv ainus kardinaal.