Kombinatoorika I kontrolltöö ülesanded ja lahendused

Ahto Buldas

18.november, 2004

Ülesanne 1. (15p)

Lahenda seos $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ algtingimusel $a_0 = 0$, st leia (kinnine) valem a_n arvutamiseks.

Lahendus. Arvestades algtingimust ja rekurrentse seose kuju on lihtne näha, et

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} k^{\underline{4}} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{4}} \delta x = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^{\underline{5}}}{5} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{10}.$$

Ülesanne 2. (40p)

Avalda summa $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$ kinnise valemina.

Lahendus. Summa $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k = \sum_{0}^{n+1} x^2 2^x \delta x$ arvutamisel kasutame esimese sammuna ositi summeerimise võtet eeldstel $u(x) = x^2$ ja $\Delta v(x) = 2^x$. Saame, et $\Delta u(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$ ja $\mathsf{E}v(x) = \mathsf{E}2^x = 2^{x+1}$, mistõttu

$$s(x) = \sum x^2 2^x \delta x = x^2 \cdot 2^x - \underbrace{\sum (2x+1) 2^{x+1} \delta x}_{t(x)}.$$

Määramata summa $t(x)$ arvutame samuti ositi summeerimise võtet kasutades, eeldustel $u(x) = 2x + 1$ ja $\Delta v(x) = 2^{x+1}$. Saame, et $\Delta u(x) = 2$ ja $\mathsf{E}v(x) = \mathsf{E}2^{x+1} = 2^{x+2}$, mistõttu

$$t(x) = (2x+1) \cdot 2^{x+1} - \sum 2 \cdot 2^{x+2} \delta x = (2x+1) \cdot 2^{x+1} - 2^{x+3} + C.$$

Seega $s(x) = x^2 \cdot 2^x - (2x+1) \cdot 2^{x+1} + 2^{x+3} + C$ ja järelikult

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k = s(n+1) - s(0) = (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} - (2n+3) \cdot 2^{n+2} + 2^{n+4} - 6.$$

Ülesanne 3. (25p)

Avalda polünoom $2x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 1$ kahanevate faktoriaalide $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots$ kaudu.

Lahendus. Tähistame $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 1$ ja arvutame vahetult $f(0) = 1$, $f(1) = 6$, $f(2) = 117$, $f(3) = 728$, $f(4) = 2865$ ja $f(5) = 8226$. Kasutades diferentsiskeemi:

1		6		117		728		2865		8226
	5		111		631		2117		5361	
		106		520		1486		3244		
			414		966		1758			
				552		792				
					240					

saame, et $\Delta f(0) = 5$, $\Delta^2 f(0) = 106$, $\Delta^3 f(0) = 414$, $\Delta^4 f(0) = 552$ ja $\Delta^5 f(0) = 240$. Arendades funktsiooni $f(x)$ Newtoni ritta, saame

$$\begin{aligned}
f(x) &= 240 \cdot \binom{x}{5} + 552 \cdot \binom{x}{4} + 414 \cdot \binom{x}{3} + 106 \cdot \binom{x}{2} + 5 \cdot \binom{x}{1} + 1 \cdot \binom{x}{0} \\
&= 240 \cdot \frac{x^{\underline{5}}}{5!} + 552 \cdot \frac{x^{\underline{4}}}{4!} + 414 \cdot \frac{x^{\underline{3}}}{3!} + 106 \cdot \frac{x^{\underline{2}}}{2!} + 5 \cdot \frac{x^{\underline{1}}}{1!} + 1 \cdot \frac{x^{\underline{0}}}{0!} \\
&= 2x^{\underline{5}} + 23x^{\underline{4}} + 69x^{\underline{3}} + 53x^{\underline{2}} + 5x^{\underline{1}} + x^{\underline{0}}.
\end{aligned}$$

Ülesanne 4. (20p)

Leia funktsioon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mis rahuldab võrrandit $\frac{1}{n}[f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)] = H_n$, kus $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$.

Lahendus. Paneme esmalt tähele, et

$$\sum_0^n f(x)\delta x = f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) = nH_n,$$

mistõttu $\sum f(x)\delta x = xH_x + C$. Nüüd saame diferentsoperaatori ja määramata summa omavahelist seost kasutades, et

$$f(x) = \Delta[xH_x] = (x+1)H_{x+1} - xH_x,$$

mistõttu $f(n) = (n+1)H_{n+1} - nH_n = H_n + 1$.