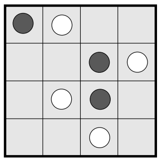
Ül.1. Kui palju on sümmeetrilises rühmas $\mathfrak{S}_7$ substitutsioone, millel on täpselt kaks invarianti?

Ül.2. Mis on paarissubstitutsioonide rühma A_n elementide (substitutsioonide) keskmine invariantide arv? Paarissubstitutsiooniks nimetatakse substitutsiooni, mida saab esitada paarisarvu transpositsioonide (substitutsioonid kujul (ij)) kompositsioonina.

Ül.3. Kui palju on sümmeetrilises rühmas $\mathfrak{S}_n$ elemente, millel puuduvad invariandid?

Ül.4. Mitmel erineval viisil saab 4×4 ruudustikuga lauale paigutada valgeid ja musti nuppe, eeldades et lauda saab pöörata ja peegeldada?



Iseseisvaks mõtisklemiseks: Tõesta, et sümmeetrilises rühmas $\mathfrak{S}_n$ (hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ kõigi substitutsioonide rühm) saab iga substitutsiooni esitada transpositsioonide (ij) kompositsioonina.

1 Lahendused

Ül.1. Kasutame esmalt liitmisvõtet, jagades loendatavad permutatsioonid invariantide paaride järgi. Erinevaid paare on $\binom{7}{2}$. Kui invariantide paar on fikseeritud, siis tuleb ülejäänud viis elementi permuteerida nii, et ühtki invarianti ei teki. Seega on otsitavate substitutsioonide arv $s_{7,2} = \binom{7}{2} \cdot s_{5,0}$, kus $s_{5,0}$ on viieelemendilise hulga $\{1, \ldots, 5\}$ kõigi selliste substitutsioonide arv, millel puuduvad invariandid.

Suuruse $s_{5,0}$ leiame elimineerimismeetodit kasutades. Defineerime omadused $a_1, \ldots, a_5$, nii et substitutsioonil σ on omadus a_i parajasti siis, kui $\sigma(i) = i$. Eeldades, et kaalud on triviaalsed saame, et $s_{5,0}$ avaldub kui kõigi selliste permutatsioonide loend, millel ei ole ühtegi omadust a_i, ehk

$$s_{5,0} = \ell(\overline{a_1}\,\overline{a_2} \ldots \overline{a_5}) = L_0 - L_1 + L_2 - L_3 + L_4 - L_5 \ ,$$

kus $L_m = \sum_{c(m)} \ell(a_{i_1} \dots a_{i_m})$ ja summa arvutatakse üle kõikvõimalike m omaduse komplektide. Et $L_m = \binom{5}{m} \cdot (5-m)! = \frac{5!}{m!}$, siis

$$s_{5,0} = 5! \cdot \left(\sum_{m=0}^{5} \frac{(-1)^m}{m!} \right) = \left[\frac{5!}{e} \right] = 44 \ ,$$

kus kandilised sulud tähendavad ümardamist. Seega, $s_{7,2} = \binom{7}{2} s_{5,0} = 21 \cdot 44 = 924$.

Ül.2. Vastavalt Burnside'i lemmale on keskmine invariantide arv võrdne orbiitide (ekvivalentsusklasside) arvuga. Kui $n = 1$ siis A_n koosneb vaid ühiksubstitutsioonist, kuid samas on ka teisendatavas hulgas vaid üks element ja seega on orbiite 1. Kui $n = 2$ siis S_n on kaheelemendiline: $S_n = \{(1), (12)\}$, kusjuures $A_n = \{(1)\}$. Rühmal A_n on seega kaks orbiiti $O_1 = \{1\}$ ja $O_2 = \{2\}$. Kui $n \geq 2$, siis on orbiite jälle vaid üks, sest mis tahes elementide paari $i \neq j$ korral leidub paarissubstitutsioon $\sigma = (ijk) = (kj)(ik) \in A_n$, nii et $\sigma(i) = j$.

Ül.3. Kasutame elimineerimismeetodit. Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral defineerime omaduse a_i, mis on substitutsioonil $\sigma \in S_n$ parajasti siis kui $\sigma(i) = i$. Iga fikseeritud m-elemendilise alamhulga korral on täpselt $(n-m)!$ substitutsiooni, mis jätavad invariantseks kõik fikseeritud m elementi. Et m-elemendilisi alamhulki on täpselt $\binom{n}{m}$, siis elimineerimisvalemist saame, et invariantideta substitutsioone on

$$\begin{aligned} s_0 &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} 0! \\ &= n! \cdot \left(1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \approx \frac{n!}{e} \ . \end{aligned}$$

Ül.4. Järgnev tabel esitab ruudustiku kõikvõimalikke pöördeid ja peegeldusi, koos vastavate substitutsioonide tsüklitüüpidega:

	Kirjeldus	Tüüp
1.	Samasusteisendus	1^{16}
2.	Pööre +90 kraadi	4^4
3.	Pööre -90 kraadi	4^4
4.	Pööre 180 kraadi	2^8
5.	Peegeldus vertikaalteljest	2^8
6.	Peegeldus horiontaalteljest	2^8
7.	Peegeldus peadiagonaalist	$1^4 2^6$
8.	Peegeldus kõrvaldiagonaalist	$1^4 2^6$

Seega tsüklilisuse indikaator on $P_{\mathcal{G}}(x_1, x_2, x_4) = x_1^{16} + 3x_2^8 + 2x_4^4 + 2x_1^4 x_2^6$ ja värvimisviiside arv $v = P_{\mathcal{G}}(3, 3, 3) = 5,398,083$.