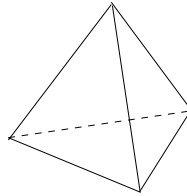


**Ül.II.1. (30p)** Kui palju on sümmeetrilises rühmas  $\mathfrak{S}_9$  substitutsioone, millel on täpselt kolm invarianti?

**Ül.II.2. (30p)** 24-tahulise keha sümmeetriarühm  $\mathcal{G}$  (tahkude substitutsioonide rühma alamrühm) koosneb 60 teisendusest. Kas on võimalik, et mingi tahu  $x$  ekvivalentsusklass  $O_x$  (orbiit) koosneb täpselt 8-st tahust? Põhjenda!

**Ül.II.3. (30p)** Kui mitmel viisil saab korrapärase tetraeedri tahke värvida kuni 4 erineva värviga?



# 1 Lahendused

**Ül.II-1.** Kasutame esmalt liitmismõtet, jagades loendatavad permutatsioonid invariantide kolmikute järgi. Erinevaid kolmikuid on  $\binom{9}{3}$ . Kui invariantide kolmik on fikseeritud, siis tuleb ülejäänud kuus elementi permuteerida nii, et ühtki invarianti ei teki. Seega on otsitavate substitutsioonide arv  $s_{9,3} = \binom{9}{3} \cdot s_{6,0}$ , kus  $s_{6,0}$  on kuueelemendilise hulga  $\{1, \dots, 6\}$  kõigi selliste substitutsioonide arv, millel puuduvad invariantid.

Suuruse  $s_{6,0}$  leiame elimineerimismeetodit kasutades. Defineerime omadused  $a_1, \dots, a_6$ , nii et substitutsioonil  $\sigma$  on omadus  $a_i$  parajasti siis, kui  $\sigma(i) = i$ . Eeldades, et kaalud on triviaalsed saame, et  $s_{6,0}$  avaldub kui kõigi selliste permutatsioonide loend, millel ei ole ühtegi omadust  $a_i$ , ehk

$$s_{6,0} = \ell(\overline{a_1 a_2} \dots \overline{a_5}) = L_0 - L_1 + L_2 - L_3 + L_4 - L_5 + L_6 ,$$

kus  $L_m = \sum_{c(m)} \ell(a_{i_1} \dots a_{i_m})$  ja summa arvutatakse üle kõikvõimalike  $m$  omaduse komplektide. Et  $L_m = \binom{6}{m} \cdot (6 - m)! = \frac{6!}{m!}$ , siis

$$s_{6,0} = 6! \cdot \left( \sum_{m=0}^6 \frac{(-1)^m}{m!} \right) = \left[ \frac{6!}{e} \right] = 265 ,$$

kus kandilised sulud tähendavad ümardamist. Seega,  $s_{9,3} = \binom{9}{3} s_{6,0} = 84 \cdot 265 = 22260$ .

**Ül.II-2.** Selline olukord ei ole võimalik. Tahu  $x$  korral kehtib seos

$$|\mathcal{G}| = |\mathcal{G}_x| \cdot |O_x| ,$$

kus  $\mathcal{G}_x$  on alamrühm, mis koosneb kõigist neist rühma  $\mathcal{G}$  teisendustest  $\sigma$ , mis jätavad  $x$  invariantseks. Seega peaks sümmetriateisenduste arv 60 jaguma ekvivalentsusklassi suurusega 8, mis aga ei pea paika.

**Ül.II-3.** Järgnev tabel esitab tetraeedri kõikvõimalikke pöördeid koos vastavate substitutsioonide  $\sigma$  tsüklite arvuga  $\zeta(\sigma)$ :

	Esitus substitutsioonina $\sigma$	$\zeta(\sigma)$
1.	(1)	4
2.	(234)	2
3.	(243)	2
4.	(12)(34)	2
5.	(123)	2
6.	(124)	2
7.	(132)	2
8.	(134)	2
9.	(13)(24)	2
10.	(142)	2
11.	(143)	2
12.	(14)(23)	2

Seega on värvimisviiside arv  $\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma} 4^{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{12}(11 \cdot 4^2 + 4^4) = 36$ .