

## Ülesanded

**Ül.1. (25 punkti)** Arvujada  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  rahuldab tingimusi  $a_0 = a_1 = 0$  ja  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$  iga  $n \geq 2$  korral. Leia harilik genereeriv funktsioon  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

**Ül.2. (25 punkti)** Leia kinnine valem summa  $s_m = \sum_{n=0}^m n(n-1)(n-2)2^n$  arvutamiseks.

**Ül.3. (25 punkti)** Leida jada  $a_n$ , mille harilik genereeriv funktsioon on  $a(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$ .

**Ül.4. (25 punkti)** Mitmel erineval viisil saab maksta 16 krooni, eeldusel et maksjal on olemas piiramatul hulgal 1-, 2-, 4-, ja 8-krooniseid rahatähti? (Mitte pöörata tähelepanu asjaolule, et meie riigis 4- ja 8-krooniseid rahatähti ei ole!)

## Lahendused

**Ül.1.** Tänu võrdustele:

$$\begin{aligned} xa(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ x^2 a(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

saame, et

$$x(1+x)a(x) + \frac{1}{1-x} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + a(x) ,$$

millest omakorda jäeldub, et  $a(x) = \frac{1+x}{x^2+x-1} - \frac{1}{(1-x)(x^2+x-1)} = \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x-1)}$ .

**Ül.2.** Avaldades summa  $s_m$  määratud summana saame, et

$$s_m = \sum_0^{m+1} x^3 \cdot 2^x \delta x$$

Võttes  $u(x) = x^3$  ja  $\Delta v(x) = 2^x$ , saame et  $\Delta u(x) = 3x^2$ ,  $v(x) = 2^x$  ja  $\mathbb{E}v(x) = 2^{x+1}$ . Seega, ositi summeerimise valemit kasutades saame:

$$s_m = x^3 2^x \Big|_0^{m+1} - 3 \underbrace{\sum_0^{m+1} x^2 2^{x+1} \delta x}_{s'_m} .$$

Suuruse  $s'_m$  arvutamiseks tähistame  $u(x) = x^2$  ja  $\Delta v(x) = 2^{x+1}$ , millest tuleneb, et  $\Delta u(x) = x$ ,  $v(x) = 2^{x+1}$  ja  $\mathbb{E}v(x) = 2^{x+2}$ . Kasutades teist korda ositi summeerimist saame:

$$s'_m = x^2 2^{x+1} \Big|_0^{m+1} - 2 \underbrace{\sum_0^{m+1} x 2^{x+2} \delta x}_{s''_m} .$$

Suuruse  $s''_m$  arvutamiseks võib jälle kasutada ositi summeerimist. Selleks võtame  $u(x) = x$  ja  $\Delta v(x) = 2^{x+2}$ , millest tuleneb, et  $\Delta u(x) = 1$ ,  $v(x) = 2^{x+2}$  ja  $\mathbb{E}v(x) = 2^{x+3}$ . Saame:

$$s''_m = x 2^{x+2} - 2^{x+3} \Big|_0^{m+1} ,$$

ja seega:

$$\begin{aligned} s_m &= x^3 2^x - 3x^2 2^{x+1} + 6x 2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x+3} \Big|_0^{m+1} \\ &= [(m+1)^3 2^{m+1} - 3(m+1)^2 2^{m+2} + 6(m+1) 2^{m+3} - 6 \cdot 2^{m+4}] - [-6 \cdot 2^3] \\ &= (m^3 - 6m^2 + 17m - 24) \cdot 2^{m+1} + 48 . \end{aligned}$$

**Ül.3.** Jada  $a_n$  elementide arvutusreegli leidmiseks arendame funktsiooni  $a(x)$  astmeritta. Esmalt aga lihtsustame funktsiooni  $a(x)$  esitust järgmiselt:

$$a(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{(1-x)(3-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{3B}{3-x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-\frac{x}{3}} ,$$

millest saame, et  $A = \frac{3}{2}$  ja  $B = -\frac{1}{2}$ . Seega

$$a(x) = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n ,$$

millest tuleneb, et  $a_n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ .

**Ül.4.** Kasutame järgmisi tähistusi:

- $P^1(x)$  – ainult ühekroonistega maksmist kirjeldav funktsioon.
- $P^2(x)$  – funktsioon, mis kirjeldab maksmisviise 1– ja 2– kroonistega.
- $P^4(x)$  – kirjeldab maksmisviise 1–, 2– ja 4– kroonistega.
- $P^8(x)$  – kirjeldab maksmisviise 1–, 2–, 4– ja 8-kroonistega.

Need funktsioonid on seotud järgmiselt:

$$\begin{aligned} P^1(x) &= 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \\ P^2(x) &= P^1(x) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) = \frac{P^1(x)}{1-x^2} \\ P^4(x) &= P^2(x) \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots) = \frac{P^2(x)}{1-x^4} \\ P^8(x) &= P^4(x) \cdot (1 + x^8 + x^{16} + x^{24} + \dots) = \frac{P^4(x)}{1-x^8} , \end{aligned}$$

millest omakorda tulenevad rekurrentsed seosed:

$$\begin{aligned} P_n^1 &= P_{n-1}^1 + [n=0] \\ P_n^2 &= P_n^1 + P_{n-2}^2 \\ P_n^4 &= P_n^2 + P_{n-4}^4 \\ P_n^8 &= P_n^4 + P_{n-8}^8 \end{aligned}$$

Arvutades nende rekurrentsete seoste abil saame, et  $P_{16}^8 = 35$ , millest järeldub, et etteantud tingimustel on võimalik maksta 16 krooni täpselt 35-l erineval viisil.