Ül.1. Arvujada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rahuldab tingimusi $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$ iga $n \geq 3$ korral. Leia harilik genereeriv funktsioon $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ül.2. Leia kinnine valem summa $s_m = \sum_{n=0}^{m}(n+2)(n-1)2^n$ arvutamiseks.

Ül.3. Leia kinnine valem suurusele b_n, kus

$$b_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{1 + 2 + 3 + \ldots + n} \quad .$$

Ül.4. Mitmel erineval viisil saab maksta 50 krooni, eeldusel et maksjal on olemas piiramatul hulgal 1-, 2-, 5-, ja 10-krooniseid rahatähti?

Lahendused:

Ül.1.

$$\begin{aligned}
a(x) &= a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \\
&= [a_2 + a_0 + 1]x^3 + [a_3 + a_1 + 1]x^4 + \ldots + [a_{n-1} + a_{n-3} + 1]x^n + \ldots \\
&= x(\underbrace{a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots}_{a(x)}) + x^3(\underbrace{a_0 + a_1x + \ldots}_{a(x)}) + x^3(1 + x + x^2 + \ldots) \\
&= (x + x^3)a(x) + \frac{x^3}{1-x} \quad ,
\end{aligned}$$

millest järeldub, et $a(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x^3+x-1)}$.

Ül.2. Summa s_m arvutamiseks leiame esmalt määratama summa $S(x) = \sum(x+2)(x-1)2^x\delta x$ ositi summeerimise abil ja kasutame seejärel Newton-Leibnizi valemi analoogi: $s_m = S(m+1) - S(0)$.

Defineerides $u(x) = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$ ja $\Delta v(x) = 2^x$, saame, et $\Delta u(x) = 2(x+1)$, $v(x) = 2^x$ ja $\mathsf{E}v(x) = 2^{x+1}$, mistõttu

$$\begin{aligned}
S(x) &= u(x)v(x) - \sum \mathsf{E}v(x)\Delta u(x)\delta x \\
&= (x^2 + x - 2)2^x - 2\sum(x+1)2^{x+1}\delta x \quad .
\end{aligned}$$

Summa $T(x) = \sum(x+1)2^{x+1}\delta x$ arvutame samuti ositi summeerimise meetodit kasutades, võttes $u(x) = x+1$ ja $\Delta v(x) = 2^{x+1}$. Seega $\Delta u(x) = 1$, $\mathsf{E}v(x) = 2^{x+2}$, mistõttu $T(x) = (x+1)2^{x+1} - \sum 2^{x+2}\delta x = (2x-2)2^x$ ja

$$S(x) = (x^2 + x - 2)2^x - 2(2x-2)2^x = (x^2 - 3x + 2)2^x \quad .$$

Saame, et $s_m = S(m+1) - S(0) = [(m+1)^2 - 3(m+1) + 2]2^{m+1} - 2 = (m^2 - m)2^{m+1} - 2$.

Ül.3. Lõpliku analüüsi meetodiga saame, et $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ ja seega $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ül.4. Tähistagu $P^1(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ kõikide selliste maksmisviiside genereerivat funktsiooni, kus kasutatakse ainult ühekrooniseid. Olgu $P^2(x)$ genereeriv funktsioon, mis iseloomustab maksmisviise 1- ja 2-kroonistega; $P^5(x)$ olgu 1-, 2- ja 5-krooniseid kasutavate maksmisviiside gen. funktsioon ja $P^{10}(x)$ olgu kõiki lubatud münte kasutavaid maksmisviise genereeriv funktsioon. Kehtivad seosed:

$$\begin{aligned}
P^2(x) &= P^1(x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) = P^1(x) \cdot \frac{1}{1-x^2} \\
P^5(x) &= P^2(x)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots) = P^2(x) \cdot \frac{1}{1-x^5} \\
P^{10}(x) &= P^5(x)(1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \ldots) = P^5(x) \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \quad .
\end{aligned}$$

Siit tulenevad omakorda seosed:

$$\begin{aligned}
P^1(x) &= 1 + xP^1(x) \\
P^2(x) &= P^1(x) + x^2 P^2(x) \\
P^5(x) &= P^2(x) + x^5 P^5(x) \\
P^{10}(x) &= P^5(x) + x^{10} P^{10}(x) \quad .
\end{aligned}$$

Siit tulenevad aga rekurrentsed seosed funktsioonide $P^i(x)$ kordajate P^i_m vahel (eeldame mugavuse pärast, et $P^i_{-j} = 0$):

$$\begin{aligned}
P^1_m &= [m = 0] + P^1_{m-1} \\
P^2_m &= P^1_m + P^2_{m-2} \\
P^5_m &= P^2_m + P^5_{m-5} \\
P^{10}_m &= P^5_m + P^{10}_{m-10} \quad .
\end{aligned}$$

Rekurrentseid seoseid kasutades arvutame järgneva tabeli:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	50
P^1_m	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1
P^2_m	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	…	26
P^5_m	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10	…	146
P^{10}_m	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	11	…	**341**

Et selle tabeli arvutamine on (ilma arvutita) suhteliselt töömahukas, siis võib alternatiivse lahendusena tuletada kinnise valemi suurustele P^5_m ja kasutada seost $P^{10}_{10\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} P^5_{10i}$. Kerge on näha, et $P^2_m = \left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor$ ja $P^5_{5s} = \sum_{k=0}^{s} P^2_{5k} = \sum_{k=0}^{s} \left\lfloor \frac{5k+2}{2} \right\rfloor$. Tähistagu $n_+(s)$ ja $n_-(s)$ vastavalt paaris-ja paaritute arvude arvu hulgas $\{0 \dots s\}$. Siis saab summa $\sum_{k=0}^{s} \left\lfloor \frac{5k+2}{2} \right\rfloor$ jagada paaris- ja paarisindeksite järgi:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s} \left\lfloor \frac{5k+2}{2} \right\rfloor &= \sum_{k\text{-paaris}} \frac{5k}{2} + n_+(s) + \sum_{k\text{-paaritu}} \frac{5k}{2} - \frac{n_-(s)}{2} + n_-(s) \\
&= (s+1) + \frac{n_-(s)}{2} + \sum_{k=0}^{s} \frac{5k}{2} \\
&= (s+1) + \frac{5}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{(s+1)(5s+4) - 2\left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor}{4} \quad ,
\end{aligned}$$

sest $n_-(s) = \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor$ ja $n_+(s) + n_-(s) = s+1$. Nüüd arvutame $P_0^5 = 1$, $P_{10}^5 = 10$, $P_{20}^5 = 29$, $P_{30}^5 = 58$, $P_{40}^5 = 97$ ja $P_{50}^5 = 146$. Liites need arvud kokku saame $P_{50}^{10} = 1 + 10 + 29 + 58 + 97 + 146 = \mathbf{341}$.