Dilworthi ja Mirsky teoreemid

Ahto Buldas

December 15, 2003

o-hulga tükeldamine ahelaiks ja antiahelaiks. Teoreemid ja rakendusnäited.

o-hulga $(X, \leq)$ *ahelaks* nimetatakse alamhulka $C \subseteq X$, mille korral ahend $\leq_C$ on lineaarne järjestus.

Ahelat C nimetatakse *maksimaalseks ahelaks*, kui ta ei sisaldu pärisalamhulgana üheski teises ahelas.

o-hulga *pikkuseks* nimetatakse ahela pikkuse maksimaalväärtust, juhul kui see eksisteerib.

o-hulga $(X, \leq)$ *antiahelaks* nimetatakse alamhulka $A \subseteq X$, nii et mis tahes elementide $a_1, a_2 \in A$ korral seosest $a_1 \leq a_2$ järeldub võrdus $a_1 = a_2$. Teisisõnu, A on antiahel, kui relatsiooni $\leq$ ahend $\leq|_A$ hulgale A on samasusrelatsioon 1_A. [1]

Antiahelat A nimetatakse *maksimaalseks*, kui ta ei sisaldu pärisalamhulgana üheski teises antiahelas.

o-hulga *laiuseks* nimetatakse antiahela pikkuse maksimaalset väärtust, juhul kui see eksisteerib.

Teoreem 1 (Dilworth) *Iga lõplik o-hulk laiusega n on tükeldatav n-ks lõikumatuks ahelaks.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni hulga X elementide arvu järgi. Kui $n = 0$, siis on väide triviaalselt täidetud. Olgu $(X, \leq)$ mingi o-hulk laiusega n ja eeldame, et teoreemi väide kehtib kõikide o-hulkade korral, mille elementide arv on väiksem kui n. Olgu C mingi maksimaalne ahel. Kui o-hulga $X \backslash C$ laius on väiksem kui n, siis induktsiooni eelduse põhjal on hulk $X \backslash C$ tükeldatav ülimalt $(n-1)$-ks lõikumatuks ahelaks $C_2, \ldots, C_n$, kuid siis on X tükeldatav n ahelaks $C, C_2, \ldots, C_n$.

[1] See antiahela definitsioon sobib ka antirefleksiivsetele o-hulkadele

Olgu A hulga $X \backslash C$ antiahel pikkusega n ja Defineerime hulgad $A^+ = \{x \in X\colon \exists a \in A[a \leq x]\}$ ja $A^- = \{x \in X\colon \exists a \in A[x \leq a]\}$. On selge, et C ei saa tervikuna kuuluda hulka A^-, sest siis oleks C maksimaalne element m_c võrreldamatu kõigi A elementide suhtes, millest järelduvalt oleks $A \cup \{m_c\}$ ka antiahel. See oleks aga vastuolus eeldusega, et hulga X laius on n. Samal (st duaalsel) põhjusel ei saa C tervikuna kuuluda hulka A^+.

Järelikult on hulkades A^+ ja A^- vähem elemente kui hulgas X. Ja nad on vastavalt induktsiooni eeldusele mõlemad tükeldatavad n-ks ahelaks. Et $X = A^+ \cup A^-$, siis järelikult saame vastavaid ahelaid omavahel kombineerides ja liites hulga X tükelduse n-ks ahelaks. $\square$

Teoreem 2 (Mirsky) *Iga o-hulk X pikkusega n on tükeldatav n-ks antiahelaks.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni pikkuse n järgi. Kui pikkus on 1, siis on hulk X ise antiahel. Oletame, et väide kehtib pikkuse $n-1$ korral ja X on pikkusega n. Olgu A_0 hulga X kõigi maksimaalsete elementide hulk, mis on ilmselt antiahel. Lihtne on veenduda, et hulga $X \backslash A_0$ pikkus on $n-1$. See tuleneb asjaolust, et iga maksimaalne ahel C hulgas X sisaldab maksimaalset elementi (st. elementi hulgast A_0) ja hulga X pikkus võrdub alati mingi maksimaalse ahela pikkusega. Järelikult on hulk $X \backslash A_0$ tükeldatav $n-1$ antiahelaks $A_1, \ldots, A_{n-1}$, mistõttu n antiahelat $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ tükeldavad hulga X. $\square$

Ülesanne 1 *Tõesta, et kui o-hulk X on lõpliku pikkuse ja laiusega, siis ka tema elementide arv $|X|$ on lõplik.*

Ülesanne 2 *Tõesta, et igal n^2+1 erinevast reaalarvust koosneval järjendil $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ on $n+1$-st elemendist koosnev monotoonselt kasvav või kahanev alamjärjend.*