

33 - 35. Väljenda loomuliku keele lause kvantoritega loogilise avaldisena.

33. "Leidub vähim positiivne täisarv".

Teiste sõnadega, leidub selline positiivne täisarv, millest kõik muud täisarvud on suuremad.

Leidub  $x > 0$ , et iga  $y \neq x$  korral  $y > x$ .

$\exists x \in \mathbb{N}$  ja  $x > 0$  ja  $\forall y \in \mathbb{N}$  ja  $x \neq y$  korral  $y > x$ .

$\exists x \forall y ((x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (x > 0) \wedge \neg(x = y) \wedge (y > x))$

34. "Pole vähimat positiivset reaalarvu".

Teiste sõnadega, igast reaalarvust leidub väiksem reaalarv.

Iga  $x$  korral leidub  $y > 0$  nii, et  $y < x$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$  korral  $\exists y \in \mathbb{R}$  ja  $y > 0$  nii, et  $y < x$ .

$\forall x \exists y ((x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (y > 0) \wedge (y < x))$

35. "Iga täisarv on kahe täisarvu korrutis".

Iga  $x$  korral leidub  $y$  ja  $z$  nii, et  $x = y \cdot z$ .

$\forall x \exists y \exists z (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge x = y \cdot z)$

40. "Osasid inimesi saab iga kord petta, kõiki inimesi saab mõni kord petta, aga kõiki inimesi ei saa petta kõigil kordadel"

$x$  — inimene

$y$  — kord

$P(x, y)$  — inimest  $x$  õnnestub petta ajal  $y$

Nõndaviisi tähistades saab teiste sõnadega öelda, et:

"leidub  $x$ , et iga  $y$  korral  $P(x, y)$  ja iga  $x$  korral leidub  $y$ , et  $P(x, y)$ , aga ei ole tõi, et iga  $x$  ja iga  $y$  korral  $P(x, y)$ ".

$$\exists x \forall y P(x, y) \wedge (\forall x \exists y P(x, y)) \wedge \neg(\forall x \forall y P(x, y))$$

41 - 44. Kirjuta ja lihtsusta avaldise eitus

41.  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$

$$\neg(\forall x (P(x) \vee Q(x))) =$$

$$= \exists x (\neg(P(x) \vee Q(x))) =$$

$$= \exists x ((\neg P(x)) \wedge (\neg Q(x)))$$

42.  $\forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \implies R(x))$

$$\neg(\forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \implies R(x))) =$$

$$\exists x (\neg(P(x) \wedge Q(x)) \implies R(x)) =$$

$$\exists x (\neg(\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x)) =$$

$$\exists x (\neg((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)) \vee R(x)) =$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge (\neg R(x)))$$

$$43. \exists x(P(x) \implies Q(x))$$

$$\neg(\exists x(P(x) \implies Q(x))) =$$

$$\forall x(\neg(P(x) \implies Q(x))) =$$

$$\forall x(\neg((\neg P(x)) \vee Q(x))) =$$

$$\forall x(P(x) \wedge (\neg Q(x)))$$

$$44. \exists x\forall y(P(x) \wedge Q(y))$$

$$\neg(\exists x\forall y(P(x) \wedge Q(y))) =$$

$$\forall x\exists y((\neg P(x)) \vee (\neg Q(y)))$$

45-50. Kui muutujad kuuluvad reaalarvude hulka, kirjelda, mida iga lause tähendab loomulikus keeles. Kas need on tõesed või väärad.

$$45. \forall x\forall y(x \geq y)$$

Suvalise kahe reaalarvu korral kehtib et üks nendest arvudes on kas suurem või võrdne teise arvuga. See lause on tõene, kuna suvalisi reaalarvusi saab omavahel võrrelda ning võrdlustulemus on kas võrdsus või suurem kui.

$$46. \exists x\exists y(x \geq y)$$

Eksisteerivad sellised kaks reaalarvu, et nad on kas võrdsed või üks neist on suurem kui teine. See lause on tõene, kuna näiteks  $5 \geq 4$ .

$$47. \exists y\forall x(x \geq y)$$

Eksisteerib selline reaalarv  $y$ , et suvalise teise reaalarvu  $x$  korral kehtib  $x \geq y$ . See väide on vale, kuna suvalise reaalarvu  $y$  korral leidub reaalarv  $z = y + 1$  mis ei ole väiksem kui  $y$ .

$$48. \forall x\exists y(x \geq y)$$

Suvalise reaalarvu  $x$  korral leidub selline reaalarv  $y$ , et kehtib  $x \geq y$ . See väide on õige, kuna iga reaalarvu korral saame me leida teise reaalarvu, mis on sellest arvust väiksem või võrdne.

$$49. \forall x\exists y(x^2 + y^2 = 1)$$

Suvalise reaalarvu  $x$  korral leidub selline reaalarv  $y$ , et kehtib  $x^2 + y^2 = 1$ . Püüame leida suvalise reaalarvu  $x$  korral vastavat reaalarvu  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ . See väide on väär, kuna näiteks reaalarvu  $x = 2$  korral on ruutjuure alune avaldis  $-3$  ning vastav ruutjuur ei ole reaalarvuline.

$$50. \exists y\forall x(x^2 + y^2 = 1)$$

Leidub selline reaalarv  $y$ , et suvalise reaalarvu  $x$  korral kehtib  $x^2 + y^2 = 1$ . See väide on väär. Kui me fikseerime arvu  $y$ , siis peab  $x^2 = 1 - y^2$ , mis on konkreetne arv ning seega ei saa suvaline reaalarv  $x$  seda võrrandit rahuldada.

55. "Kui Tom läheb peole, siis lähen mina peole".  
 Kontrapositiivne — "Kui Tom ei lähe peole, siis ei lähe mina ka peole".  
 Pööratud lause — "Kui mina lähen peole, siis läheb Tom ka".
56. "Kui ma teen kodutööd, siis ma saan hea hinde".  
 Kontrapositiivne — "Kui ma ei tee kodutööd, siis ma ei saa head hinnet".  
 Pööratud lause — "Kui ma saan hea hinde, siis ma teen kodutööd".
57. "Kui  $x > 3$ , siis  $x^2 > 9$ ".  
 Kontrapositiivne — "Kui  $x \leq 3$ , siis  $x^2 \leq 9$ ".  
 Pööratud lause — "Kui  $x^2 > 9$ , siis  $x > 3$ ".
58. "Kui  $x < -3$ , siis  $x^2 > 9$ ".  
 Kontrapositiivne — "Kui  $x \geq -3$ , siis  $x^2 \leq 9$ ".  
 Pööratud lause — "Kui  $x^2 > 9$ , siis  $x < -3$ ".
59. "Kui täisarv jagub kahega, siis ta ei ole algarv".  
 Kontrapositiivne — "Kui täisarv ei jagu kahega, siis ta on algarv".  
 Pööratud lause — "Kui täisarv ei ole algarv, siis ta jagub kahega".
60. "Kui  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ , siis  $xy \geq 0$ ".  
 Kontrapositiivne — "Kui  $x < 0$  ja  $y < 0$ , siis  $xy < 0$ ".  
 Pööratud lause — "Kui  $xy \geq 0$ , siis  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ ".
61. "Kui  $x^2 + y^2 = 9$ , siis  $-3 \leq x \leq 3$ ".  
 Kontrapositiivne — "Kui  $x^2 + y^2 \neq 9$ , siis  $x < -3 \wedge x > 3$ ".  
 Pööratud lause — "Kui  $-3 \leq x \leq 3$ , siis  $x^2 + y^2 = 9$ ".
65.  $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 + 5x + 7 > 0)$   
 Leiame ruutvõrrandi nullkohad:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{25 - 28}}{2}$$

- Reaalseid nullkohti ei eksisteeri, seega ei lõika funktsiooni graafik  $x$  telge.  
 Kuna  $x^2$  kordaja on positiivne, siis asub funktsiooni graafik ülalpool  $x$  telge. Seega  
 $\forall x \in \mathbb{R}$  korral on see avaldis tõene.

66. Kui  $m$  ja  $n$  on täisarvud ja  $mn$  on paaritu arv, siis  $m$  ja  $n$  on paaritud arvud.

$$(mn = 2k + 1) \implies (m = 2k_1 + 1) \wedge (n = 2k_2 + 1)$$

$$mn = (2k_1 + 1) \cdot (2k_2 + 1) = (4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2) + 1 = 2k + 1$$

...?

67. Kui  $x$  ja  $y$  on reaalarvud, siis  $\forall x \exists y(x^2 > y^2)$ .  
 Esitame kontranäite.  $x = 0$  korral ei leidu sellist  $y$ , et  $y^2 < 0$ , kuna  $\forall y(y^2 \geq 0)$ .
68.  $(S \cap T) \cup U = S \cap (T \cup U)$  suvalise hulga  $S, T$  ja  $U$  jaoks.

$$S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$$

$$(S \cap T) \cup U = \{x | x \in (S \cap T) \vee x \in U\} =$$

$$= \{x | x \in S \wedge x \in T \vee x \in U\}$$

$$T \cup U = \{x | x \in T \vee x \in U\}$$

$$S \cap (T \cup U) = \{x | x \in S \wedge x \in (T \cup U)\} =$$

$$= \{x | x \in S \wedge x \in T \vee x \in U\}$$

Kuna hulgad on võrdsed, siis järelikult lause on tõene.

$$69. (S \cup T) = T \iff S \subseteq T$$

$$1) (S \cup T) = T \implies S \subseteq T$$

$$((S \cup T) = T)$$

$$\forall x(x \in (S \cup T) \iff x \in T)$$

$$\forall x((x \in S \vee x \in T) \iff x \in T)$$

$$\forall x((x \in S \vee x \in T) \implies x \in T)$$

$$\forall x(x \in S \implies x \in T)$$

$$S \subseteq T$$

$$2) S \subseteq T \implies (S \cup T) = T$$

$$\forall x(x \in S \implies x \in T)$$

$$\forall x((\neg(x \in S)) \vee x \in T)$$

$$\forall x(x \in (S \cup T) \iff x \in T)$$

$$\forall x((x \in S \vee x \in T) \iff x \in T)$$

Kuna  $x \in T$  siis vasak pool kehtib ning parem pool kehtib. Seega implikatsioon kehtib.

Mõlematpidi tõestamine õnnestus. Seega kehtib.

70. Kui  $x$  on selline reaalarv, et  $x^4 + 2x^2 - 2x < 0$ , siis  $0 < x < 1$ .

Kasutame kontrapositiivi, et kui  $(\neg Q \implies \neg P)$  siis  $P \implies Q$ .

$$(\neg(0 < x < 1)) \implies \neg(x^4 + 2x^2 - 2x < 0)$$

$$(\neg((0 < x) \wedge (x < 1))) \implies x^4 + 2x^2 - 2x \geq 0$$

$$((\neg(0 < x)) \vee (\neg(x < 1))) \implies x^4 + 2x^2 - 2x \geq 0$$

$$((0 \geq x) \vee (x \geq 1)) \implies x^4 + 2x^2 - 2x \geq 0$$

Kui  $x = 0$  siis  $0 + 0 - 0 = 0 \geq 0$  ja kui  $x = 1$  siis  $1 + 2 - 2 = 1 \geq 0$ .