Lausearvutus

Konjunktsioon — Lause $A \wedge B$ on tõene siis, kui lause A on tõene ja lause B on tõene.

Disjunktsioon — Lause $A \vee B$ on tõene siis, kui lause A on tõene või kui lause B on tõene või kui lause A ja lause B on mõlemad tõesed.

Eitus — Lause $\neg A$ on tõene siis, kui lause A on väär.

Implikatsioon — Lause $A \implies B$ on tõene siis, kui lause A on väär või siis, kui lause A on tõene ja lause B on tõene.

Hulgad

Positiivsete täisarvude hulk $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Kõigi täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Tühja hulga tähis on $\emptyset$

Hulga S ja hulga T ühisosa $S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$

Hulga S ja hulga T ühend $S \cup T = \{x | x \in S \vee x \in T\}$

Hulga S ja hulga T ristkorrutis $S \times T = \{(x, y) | x \in S \wedge y \in T\}$

Kvantorid

$P(x)$ on tõene kõikide muutuja x väärtuste jaoks $= \forall x P(x)$

$P(x)$ on tõene vähemalt ühe muutuja x väärtuse jaoks $= \exists x P(x)$

Ülesanded

33—40. Väljenda iga lause loogilise avaldisena, mis sisaldab kvantoreid. Märgi muutujate määramispiirkond.

33. “On olemas vähim positiivne täisarv”

34. “Ei ole olemas vähimat positiivset reaalarvu”

35. “Iga täisarv on kahe täisarvu korrutis”

40. “Osasid inimesi saab iga kord petta, kõiki inimesi saab mõni kord petta, aga kõiki inimesi ei saa petta kõigil kordadel”

Ülesanded

45—50. Kui muutujate määramispiirkond on reaalarvude hulk, siis mida tähendavad järgmised laused. Kas need laused on tõesed või väärad?

45. $\forall x \forall y (x \geq y)$

46. $\exists x \exists y (x \geq y)$

47. $\exists y \forall x (x \geq y)$

48. $\forall x \exists y (x \geq y)$

49. $\forall x \exists y (x^2 + y^2 = 1)$

50. $\exists y \forall x (x^2 + y^2 = 1)$

Kvantorite eitamine

$$\neg\left(\forall x P(x)\right) \equiv \exists x(\neg P(x))$$

$$\neg\left(\exists x P(x)\right) \equiv \forall x(\neg P(x))$$

Ülesanded

41—44. Kirjuta ja lihtsusta järgmiste avaldiste eitus.

41. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

42. $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \implies R(x))$

43. $\exists x(P(x) \implies Q(x))$

44. $\exists x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

Standardsed tõestuskäigud

1. $P \implies Q$

2. $P \iff Q$

3. $(\neg Q \implies \neg P) \implies (P \implies Q)$

4. $(\neg Q \implies \text{vastuolu}) \implies Q$

5. $P \implies (Q \vee R)$

Ülesanded

55—61. Kirjuta järgmiste lausete kontrapositiivne lause ning pöördlause.

55. Kui Tom läheb peole, siis lähen mina peole.

56. Kui ma teen kodused ülesanded, siis ma saan hea hinde.

57. Kui $x > 3$, siis $x^2 > 9$.

58. Kui $x < -3$, siis $x^2 > 9$.

59. Kui täisarv jagub kahega, siis ta ei ole algarv.

60. Kui $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, siis $xy \geq 0$.

61. Kui $x^2 + y^2 = 9$, siis $-3 \leq x \leq 3$.

Ülesanded

65—70. Tõesta iga lause või leia kontranäide.

65. $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 + 5x + 7 > 0)$

66. Kui m ja n on täisarvud ja mn on paaritu arv, siis m ja n on paaritud arvud.

67. Kui x ja y on reaalarvud, siis $\forall x \exists y (x^2 > y^2)$.

68. $(S \cap T) \cup U = S \cap (T \cup U)$ suvalise hulga S, T ja U jaoks.

69. $(S \cup T) = T \iff S \subseteq T$

70. Kui x on selline reaalarv, et $x^4 + 2x^2 - 2x < 0$, siis $0 < x < 1$.

Kodused ülesanded

73. Kui S, T ja U on hulgad, siis võib lauset $S \cap T \subseteq U$ kirjutada kui $\forall x((x \in S \wedge x \in T) \implies x \in U)$. Kirjuta avaldis $S \cap T \not\subseteq U$.

74. Kui S ja T on hulgad, siis võib lauset $S = T$ kirjutada kui $\forall x(x \in S \iff x \in T)$. Mida tähendab $S \neq T$? Kuidas näidata, et kaks hulka ei ole võrdsed?

75. Funktsiooni piirväärtust $\lim_{x \to a} f(x) = L$ saab kirjutada kui $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$. Kasuta kvantoreid ja kirjuta selle lause eitus, mis oleks siis $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ definitsiooniks.

76. Kasutades tõeväärtustabeleid näita, et lause $P \implies (Q \vee R)$ on sama mis lause $(P \wedge \neg Q) \implies R$.